Teoremi di composizione
Parte positiva e modulo di una funzione di Sobolev

Composizione di funzioni $W^{1,p}(I)$ con funzioni C^1

Teorema 1. *Sia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $G(0)=0$.*
Sia I un intervallo aperto e sia $p\in[1,\infty]$. Allora, per ogni $u\in W^{1,p}(I)$, abbiamo che

$$G(u)\in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (G\circ u)'=G'(u)u'\,.$$

Dimostrazione. Siccome $u\in W^{1,p}(I)$, abbiamo che $u\in L^\infty(I)$. Prendiamo una costante $R\ge\|u\|_{L^\infty(I)}$. Siccome $G':[-R,R]\to\mathbb{R}$ è continua, abbiamo che G' è limitata su $[-R,R]$. Sia

$$L:=\max_{[-R,R]}|G'(x)|.$$

Allora,

$$|G(x)|\le L|x| \quad \text{per ogni} \quad x\in[-R,R].$$

Di conseguenza,

$$|G(u)|\le L|u|$$

e quindi $G(u)\in L^p(I)$ e $G'(u)u'\in L^p(I)$. Sia ora $\varphi_n\in C^\infty(I)\cap W^{1,p}(I)$ una successione di funzioni che converge a u fortemente in $W^{1,p}(I)$ e $L^\infty(I)$. Siccome G è continua, abbiamo che

$$|G(\varphi_n)-G(u)|\le L|\varphi_n-u|,$$

e quindi $G(\varphi_n)\to G(u)$ in L^p. Analogamente,

$$|G'(\varphi_n)\varphi_n'-G'(u)u'|\le|G'(\varphi_n)||\varphi_n'-u'|+|G'(\varphi_n)-G'(u)||u'|\le L|\varphi_n'-u'|+|G'(\varphi_n)-G'(u)||u'|,$$

e la tesi segue dalla convergenza uniforme di $|G'(\varphi_n)-G'(u)|$ a zero. □

Convergenza forte e composizioni

Proposizione 2. *Sia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $G(0)=0$. Sia I un intervallo aperto e sia $p\in[1,\infty]$. Sia $u_n\in W^{1,p}(I)$ una successione che converge fortemente ad una funzione $u\in W^{1,p}(I)$. Allora, la successione $G(u_n)$ converge fortemente in $W^{1,p}(I)$ a $G(u)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $u_n\in L^\infty(I)$ e che la successione u_n converge fortemente in $L^\infty(I)$ alla funzione u. Allora, esiste una costante $R>0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty(I)}\le R \quad \text{e} \quad \|u_n\|_{L^\infty(I)}\le R \quad \text{per ogni} \quad n\ge 1.$$

Di conseguenza,

$$G':[-R,R]\to\mathbb{R}$$

è limitata e uniformemente continua su $[-R,R]$. In particolare, poniamo

$$L:=\max_{[-R,R]}|G'(x)|.$$

La tesi segue dalle stime

$$|G(u_n)-G(u)|\le L|u_n-u|.$$

$$
\begin{aligned}
|G'(u_n)u_n' - G'(u)u'| &\le |G'(u_n)u_n' - G'(u_n)u'| + |G'(u_n)u' - G'(u)u'| \\
&\le |G'(u_n)||u_n' - u'| + |G'(u_n) - G'(u)||u'| \\
&\le L|u_n' - u'| + |G'(u_n) - G'(u)||u'|.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che possiamo assumere

$$u_n \to u \quad \text{puntualmente quasi-ovunque su} \quad I.$$

Siccome

$$|G'(u_n) - G'(u)||u'| \le 2L|u'|,$$

per il teorema della convergenza dominata, abbiamo che

$$|G'(u_n) - G'(u)||u'| \to 0 \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I).$$

Quindi,

$$G(u_n) \to G(u) \quad \text{e} \quad G'(u_n)u_n' \to G'(u)u' \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I). \qquad \square$$

Esercizio 3. *Sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $G(0) = 0$.*
Siano I un intervallo aperto e $p \in (1, \infty)$. Mostare che se $u_n \in W^{1,p}(I)$ converge debolmente a $u \in W^{1,p}(I)$, allora $G(u)$ converge debolmente a $G(u_n)$.

Convergenza forte delle composizioni con diverse funzioni C^1

Proposizione 4. *Consideriamo una successione di funzioni $G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:*

(a) *G_k e di classe C^1 per ogni $k \ge 1$;*

(b) *$G_k(0) = 0$ per ogni $k \ge 1$;*

(c) *esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$\|G_k'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le L \quad \textit{per ogni} \quad k \ge 1\,;$$

(d) *esiste una funzione Lebesgue misurabile $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$G_k(x) \to G(x) \quad \textit{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x \in \mathbb{R}\,;$$

(e) *esiste una funzione Lebesgue misurabile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$G_k'(x) \to g(x) \quad \textit{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Allora, dati un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty)$ ed $u \in W^{1,p}(I)$, abbiamo che:

(i) *$G(u) \in W^{1,p}(I)$ e la sua derivata debole è $g(u)u'$;*

(ii) *$G_k(u) \to G(u)$ fortemente in $W^{1,p}(I)$ per $k \to +\infty$.*

Dimostrazione. Per ipotesi $G_k(u) \to G(u)$ puntualmente quasi-ovunque, ovvero:

$$G_k(u(x)) \to G(u(x)) \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Inoltre, siccome $G_k(0) = 0$ e siccome le funzioni G_k sono L-lipschitziane abbiamo

$$|G_k(u)| = |G_k(u) - G_k(0)| \le L|u|.$$

Allora, per il teorema della convergenza dominata

$$G_k(u) \to G(u) \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I)\,.$$

Analogamente, abbiamo che

$$G_k'(u(x))u'(x) \to g(u(x))u'(x) \quad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

e

$$|G_k'(u)u'| \le L|u'|.$$

Quindi, usando di nuovo il teorema della convergenza dominata, abbiamo che

$$G_k'(u)u' \to g(u)u' \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I)\,.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

La parte positiva di una funzione di Sobolev

Teorema 5. *Sia I un intervallo aperto e sia $p \in [1,\infty]$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$, la parte positiva*

$$u_+ : I \to \mathbb{R}\ , \qquad u_+(x) := \begin{cases} u(x) & \textit{se} \quad u(x) > 0, \\ 0 & \textit{se} \quad u(x) \le 0. \end{cases}$$

è in $W^{1,p}(I)$ e la sua derivata debole è data da $(u_+)' = u'\mathbb{1}_{\{u>0\}}$.

Dimostrazione. Sia $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni tale che:

(a) $g_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ per ogni n ;

(b) $0 \le g_n \le 1$ su $\mathbb{R}$ per ogni n;

(c) $g_n(x) = 0$ per ogni $x \le \dfrac{1}{n}$ e per ogni n;

(d) $g_n(x) = 1$ per ogni $x \ge \dfrac{2}{n}$ e per ogni n;

(e) la successione g_n è crescente e

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \le 0, \\ 1 & \text{se} \quad x > 0; \end{cases}$$

Sia $G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$G_n(x) = \int_{-\infty}^{x} g_n'(t)\,dt \qquad \text{per ogni} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Allora, per costruzione

$$G_n(x) \to G(x) \qquad \text{e} \qquad G_n'(x) \to g(x),$$

per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}$, dove

$$G(x) := \begin{cases} x & \text{se} \quad x \ge 0; \\ 0 & \text{se} \quad x \le 0. \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \ge 0; \\ 0 & \text{se} \quad x \le 0. \end{cases}$$

A questo punto, la tesi segue dalla proposizione precedente. □

Modulo di una funzione di Sobolev

Corollario 6. *Sia I un intervallo aperto e sia $p \in [1, \infty]$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$,*

$$|u| \in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (|u|)' = \mathbb{1}_{\{u>0\}} u' - \mathbb{1}_{\{u<0\}} u'.$$

Corollario 7. *Sia I un intervallo aperto e sia $p \in [1, \infty]$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$,*

$$u' = \mathbb{1}_{\{u>0\}} u' + \mathbb{1}_{\{u<0\}} u'.$$

In particolare, dato un insieme misurabile $E \subset I$, abbiamo che se

$$u = 0 \quad \textit{quasi-ovunque su} \quad E,$$

allora

$$u' = 0 \quad \textit{quasi-ovunque su} \quad E.$$