Lemma di Morrey

Teorema 1 (Lemma di Morrey)**.** *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$.*
Se esistono due costanti $C > 0$ e $\alpha \in (0,1]$ tali che

$$\fint_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \le C r^{2(\alpha-1)} \quad \textit{per ogni} \quad x_0 \in B_{R/8} \quad \textit{ed ogni} \quad r \le R/2,$$

allora $u \in C^{0,\alpha}(B_{R/8})$ e

$$|u(x) - u(y)| \le \sqrt{C}\left(2^d + \frac{2}{\alpha}\right)|x-y|^\alpha \quad \textit{per ogni} \quad x, y \in B_{R/8}.$$

Dimostrazione. Fissiamo ora $x_0 \in B_{R/8}$ (possiamo supporre che $x_0 = 0$). Allora, abbiamo

$$\begin{aligned}
\fint_{B_r(x_0)} u - \fint_{B_s(x_0)} u &= \fint_{B_1} \big[u(x_0 + rx) - u(x_0 + sx)\big]\,dx \\
&= \fint_{B_1} dx \int_s^r x \cdot \nabla u(x_0 + tx)\,dt \\
&\le \fint_{B_1} dx \int_s^r |\nabla u(x_0 + tx)|\,dt \\
&= \int_s^r dt \fint_{B_1} |\nabla u(x_0 + tx)|\,dx \\
&= \int_s^r dt \fint_{B_t(x_0)} |\nabla u|\,dx \\
&\le \int_s^r dt \left(\fint_{B_t(x_0)} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2} \le \int_s^r \sqrt{C} t^{\alpha-1}\,dt \le \frac{\sqrt{C}}{\alpha} r^\alpha.
\end{aligned}$$

In particolare, per ogni $x_0 \in B_{R/8}$ esiste il limite

$$L(x_0) = \lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x_0)} u\ ,$$

e per ogni $r > 0$, abbiamo che

$$\left| L(x_0) - \fint_{B_r(x_0)} u \right| \le \frac{\sqrt{C}}{\alpha} r^\alpha.$$

Osserviamo che, siccome $u \in L^1(B_R)$, quasi-ogni punto $x \in B_{R/8}$ è un punto di Lebesgue. Quindi

$$L(x) = \lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x)} u = u(x) \qquad \text{per Lebesgue quasi-ogni} \qquad x \in B_{R/8}\,.$$

Dimostreremo che $L \in C^{0,\alpha}(B_{R/8})$. Supponiamo che $x, y \in B_{R/8}$. Poniamo $r = |x-y|$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\left| \int_{B_r(x)} u - \int_{B_r(y)} u \right| &= \left| \int_{B_r} \big[u(x+z) - u(y+z)\big]\, dz \right| \\
&= \left| \int_{B_r} dz \int_0^1 (y-x)\cdot \nabla u(x(1-t)+ty+z)\, dt \right| \\
&\le |x-y| \int_{B_r} dz \int_0^1 |\nabla u(x(1-t)+ty+z)|\, dt \\
&= |x-y| \int_0^1 dt \int_{B_r} |\nabla u(x(1-t)+ty+z)|\, dz \\
&\le |x-y| \int_0^1 dt \int_{B_{2r}(x)} |\nabla u| = r \int_{B_{2r}(x)} |\nabla u| \\
&\le r\,|B_{2r}| \left(\fint_{B_{2r}(x)} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \le 2^d \sqrt{C} |B_r| r^\alpha.
\end{aligned}$$

Infine, per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$\begin{aligned}
|L(x)-L(y)| &\le \left| L(x) - \int_{B_r(x)} u \right| + \left| \int_{B_r(x)} u - \int_{B_r(y)} u \right| + \left| L(y) - \int_{B_r(y)} u \right| \\
&\le \frac{\sqrt{C}}{\alpha} r^\alpha + 2^d \sqrt{C} r^\alpha. + \frac{\sqrt{C}}{\alpha} r^\alpha \\
&= \sqrt{C}\Big(2^d + \frac{2}{\alpha}\Big) r^\alpha \\
&= \sqrt{C}\Big(2^d + \frac{2}{\alpha}\Big) |x-y|^\alpha,
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

Teorema 2. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$. Se $|\nabla u| \in L^p(B_R)$ per un qualche $p \in (d, +\infty]$, allora u è α-Hölder in B_R, dove*

$$\alpha = 1 - \frac{p}{d}.$$

In particolare, si ha l'inclusione

$$W^{1,p}(B_R) \subset C^{0,\alpha}(B_R).$$

Dimostrazione. Osserviamo che se

$$\int_{B_R} |\nabla u|^p \, dx < +\infty\,,$$

allora per ogni $B_r(x_0) \subset B_R$ abbiamo

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \le |B_r|^{1-\frac{2}{p}} \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \right)^{\frac{2}{p}} \le |B_r| \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \omega_d^{-2/p} r^{-2d/p}.$$

Quindi, scegliendo

$$C = \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{2}{p}} \omega_d^{-2/p} \qquad \text{e} \qquad \alpha = 1 - \frac{d}{p}\,,$$

abbiamo che

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \le C r^{-2d/p} = C r^{2(1-\alpha)}.$$

□

Corollario 3. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$. Se $|\nabla u| \in L^\infty(B_R)$, allora u è Lipschitziana e*

$$|u(x) - u(y)| \le \|\nabla u\|_{L^\infty(B_R)} 2^{d+1} |x-y| \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_R.$$

Teorema 4. *Siano* $d \geq 2$ *e* $p \in (d, +\infty)$. *Allora,*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d),$$

ed esiste una costante $C > 0$ *tale che*

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Dimostrazione. Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Per il Teorema 2 ed il Lemma di Morrey, abbiamo che u è continua e che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$.

$$|u(x) - u(y)| \leq \Big(2^d + \frac{2}{\alpha}\Big)\bigg(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p \, dx\bigg)^{\frac{1}{p}} \omega_d^{-1/p}|x - y|^\alpha,$$

ovvero

$$|u(x) - u(y)| \leq C(d, p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}|x - y|^\alpha,$$

dove

$$\alpha = 1 - \frac{d}{p} \qquad \text{e} \qquad C(d, p) = \Big(2^d + \frac{2}{\alpha}\Big)\omega_d^{-1/p}.$$

Sia ora x_0 un qualsiasi punti in $\mathbb{R}^d$. Allora,

$$\begin{aligned}
|u(x_0)| = \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x_0)} |u(x_0)| \, dx &\leq \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x_0)} |u(x)| \, dx + \frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x_0)} |u(x_0) - u(x)| \, dx \\
&\leq \bigg(\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1(x_0)} |u(x)|^p \, dx\bigg)^{\frac{1}{p}} + C(d, p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C(d, p)\Big(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\Big).
\end{aligned}$$

$\square$