Definizione puntuale di una funzione di Sobolev - il caso $p < d$

Riscalamenti di una funzione di Sobolev

Lemma 1. *Siano $p \in (1, +\infty)$ e $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo la funzione*

$$\phi_\varepsilon(x) := \phi(x/\varepsilon).$$

Allora, $\phi_\varepsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^{\frac{d}{p}} \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \qquad e \qquad \|\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^{\frac{d}{p}-1} \|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

In particolare, se $p < d$, allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\phi_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Se $p = d$, allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\phi_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \|\nabla\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Dimostrazione. Sia $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora, usando il cambio di variabile $y = x/d$, calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi_\varepsilon(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x/\varepsilon)|^p \, dx = \varepsilon^d \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y)|^p \, dy.$$

Analogamente, siccome

$$|\nabla\phi_\varepsilon(x)| = \frac{1}{\varepsilon} |\nabla\phi|(x/\varepsilon),$$

abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi_\varepsilon(x)|^p \, dx = \varepsilon^{-p} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|^p(x/\varepsilon) \, dx = \varepsilon^{d-p} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi|^p(y) \, dy.$$

Siccome le funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sono dense in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, abbiamo la tesi anche quando $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Convergenza forte e convergenza puntuale in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Lemma 2. *Siano $d \geq 2$ e $p \in (1, d)$. Allora, esiste una successione $u_n \in C(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tale che*

- *$u_n(0) = 1$ per ogni $n \geq 1$;*
- $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = 0.$

Dimostrazione. Prendiamo una funzione $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $\phi(0) = 1$ e definiamo $u_n(x) = \phi(nx)$. La tesi segue dal lemma precedente. $\square$

Esempio di uno spazio $W_0^{1,p}$.

Siano $d \geq 2$, $p \in [1, d)$ ed Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. **Non è vero** che se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, allora $u = 0$ su $\partial\Omega$. Infatti, abbiamo l'esempio seguente.

Esempio 3. *Sia $\Omega := B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^d$. Allora, per ogni $p < d$,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(B_1).$$

Dimostrazione. Per definizione, abbiamo che

$$W_0^{1,p}(B_1 \setminus \{0\}) \subset W_0^{1,p}(B_1)\,.$$

Quindi, basta dimpstrare l'inclusione opposta.

Prendiamo una funzione $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ tale che $\varphi \equiv 1$ on $B_{1/2}$ e consideriamo i riscalamenti

$$\phi_\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon).$$

Per ogni funzione $u \in C_c^\infty(B_1)$ consideriamo la famiglia di funzioni

$$u(1 - \phi_\varepsilon) \in C_c^\infty(B_1 \setminus \{0\}).$$

Abbiamo che:

$$\|\phi_\varepsilon u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^\infty} \|\phi_\varepsilon\|_{L^p}\,;$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\phi_\varepsilon u)\|_{L^p} &= \|\phi_\varepsilon \nabla u + u \nabla \phi_\varepsilon\|_{L^p} \\
&\leq \|\phi_\varepsilon \nabla u\|_{L^p} + \|u \nabla \phi_\varepsilon\|_{L^p} \\
&\leq \|u\|_{L^\infty} \|\nabla \phi_\varepsilon\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^\infty} \|\phi_\varepsilon\|_{L^p}\,.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(1 - \phi_\varepsilon) = u$$

fortemente in $W^{1,p}(B_1)$. Siccome $u(1 - \phi_\varepsilon) \in C_c^\infty(B_1 \setminus \{0\})$, abbiamo che per definizione

$$u \in W_0^{1,p}(B_1 \setminus \{0\}).$$

Quindi, abbiamo dimostrato che

$$C_c^\infty(B_1) \subset W_0^{1,p}(B_1 \setminus \{0\}).$$

In particolare, per la definizione di $W_0^{1,p}(B_1)$,

$$W_0^{1,p}(B_1) \subset W_0^{1,p}(B_1 \setminus \{0\})\,,$$

il che conclude la dimostrazione. □