Soluzioni deboli dell'equazione di Poisson in domini limitati

Soluzioni deboli in $H_0^1(\Omega)$

Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$ una funzione data. Consideriamo il funzionale

$$J_f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}\ , \qquad J_f(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega uf\,dx.$$

Esercizio 1. *Mostrare che esiste una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ che minimizza J_f in $H_0^1(\Omega)$.*

Esercizio 2. *Data una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ che minimizza J_f in $H_0^1(\Omega)$, mostrare che*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega uf\,dx.$$

Esercizio 3. *Mostrare che il funzionale J_f è convesso, ovvero che*

$$J_f(tu + (1-t)v) \le tJ_f(u) + (1-t)J_f(v) \quad \textit{per ogni} \quad u, v \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{ed ogni} \quad t \in [0,1].$$

Esercizio 4. *Mostrare che se $u, v \in H_0^1(\Omega)$ sono tali che*

$$J_f\Big(\frac{u+v}{2}\Big) = \frac{1}{2}J_f(u) + \frac{1}{2}J_f(v)\,,$$

allora $u = v$. Dedurre che la funzione u che minimizza J_f in $H_0^1(\Omega)$ è unica.

Esercizio 5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato, $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Mostrare che sono equivalenti:*

(1) *u è l'unico minimo del funzionale J_f in $H_0^1(\Omega)$;*

(2) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega);$

(3) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega vf\,dx \quad \textit{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega).$

Definizione 6. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Diremo che u è soluzione debole del problema*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega vf\,dx \quad \textit{per ogni} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 7. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$.*
Esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Inoltre, u è anche l'unico minimo in $H_0^1(\Omega)$ del funzionale

$$J_f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega uf\,dx.$$

Esercizio 8. *Mostrare che se $f \in L^2(\Omega)$ ed u è la soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega),$$

allora

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega uf \, dx.$$

Dedurre che

$$J_f(u) = -\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega uf \, dx.$$

Soluzioni deboli con condizioni di Dirichlet

Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Siano

$$g \in H^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad f \in L^2(\Omega),$$

due funzioni date. Diciamo che la funzione $u \in H^1(\Omega)$ sia una soluzione debole del problema

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega\,,$$

se $u - g \in H^1_0(\Omega)$ e se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi f \, dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in H^1_0(\Omega)\,.$$

Teorema 9. *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, $g \in H^1(\Omega)$ ed $f \in L^2(\Omega)$. Allora Esiste un'unica soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

Inoltre, la funzione u è anche l'unico minimo del funzionale

$$J_f(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx\,,$$

fra tutte le funzioni della forma

$$u = g + w \qquad con \qquad w \in H^1_0(\Omega).$$

Dimostrazione.
Step 1. Sia $u_n \in H^1(\Omega)$ una successione di funzioni della forma

$$u_n = g + w_n \qquad \text{con} \qquad w_n \in H^1_0(\Omega)\,,$$

tale che

$$J_f(u_n) \downarrow I := \inf \Big\{ J_f(w + f) \ : \ w \in H^1_0(\Omega) \Big\}\,.$$

Possiamo supporre che

$$J_f(w_n + g) = J_f(u_n) \le J_f(g) \quad \text{per ogni} \quad n \ge 1.$$

In particolare, abbiamo che

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(w_n + g)|^2 \, dx - \int_\Omega (w_n + g) f \, dx \le \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla g|^2 \, dx - \int_\Omega gf \, dx\,,$$

che possiamo scrivere anche come

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \, dx \le - \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla g \, dx + \int_\Omega w_n f \, dx.$$

Ora, usando la disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e Poincaré

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n|^2\,dx &\le -\int_\Omega \nabla w_n\cdot\nabla g\,dx + \int_\Omega w_n f\,dx\\ &\le \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla g|^2\,dx\right)^{1/2} + \|w_n\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla g|^2\,dx\right)^{1/2} + C_P\|f\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega |\nabla w_n|^2\,dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

e in conclusione otteniamo che

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^2\,dx \le C\left(\int_\Omega |\nabla g|^2\,dx + \int_\Omega |f|^2\,dx\right),$$

dove C dipende solo dal dominio Ω e la dimensione d. Esistono quindi una funzione $w \in H^1_0(\Omega)$ ed una sottosuccessione w_{n_k} tali che

$$w_{n_k} \rightharpoonup w \quad \text{debolmente in} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Ponendo

$$u := w + g\,,$$

otteniamo che

$$J_f(u) = J_f(w+g) = \lim_{n\to+\infty} J_f(w_n + g) = I\,.$$

Quindi, la funzione $u = w + g$ minimizza il funzionale J_f fra tutte le funzioni nello spazio $g + H^1_0(\Omega)$.

Step 2. Data una qualsiasi funzione $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ consideriamo la funzione

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\qquad F(t) := J_f(u+\varphi t) = \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + t\Big(\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla u + \int_\Omega \varphi f\,dx\Big) + J_f(u)\,.$$

Siccome F ha un minimo in $t = 0$, abbiamo che

$$\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla u + \int_\Omega \varphi f\,dx = 0\,,$$

e quindi u è (per definizione) soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,,\qquad u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega\,.$$

Step 3. Dimostriamo infine l'unicità della soluzione debole (che implica anche l'unicità del minimo di J_f). Supponiamo che u e v sono due soluzioni deboli di

$$\begin{aligned}-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,,\qquad u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega\,;\\ -\Delta v = f \quad \text{in} \quad \Omega\,,\qquad v = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega\,.\end{aligned}$$

Siccome $u - v = (u-g) - (v-g)$, abbiamo che

$$u - v \in H^1_0(\Omega).$$

Testando le due equazioni con $u - v$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(u-v)\,dx &= \int_\Omega f(u-v)\,dx\,,\\ \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla(u-v)\,dx &= \int_\Omega f(u-v)\,dx\,,\end{aligned}$$

e prendendo la differenza, otteniamo che

$$0 = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(u-v)\,dx - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla(u-v)\,dx = \int_\Omega |\nabla(u-v)|^2\,dx\,.$$

Siccome $u - v \in H^1_0(\Omega)$, questo implica che $u = v$. □

Una soluzione particolare

Lemma 10. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Per ogni $\delta > 0$ definiamo*

$$\Omega_\delta := \big\{x \in \Omega \ : \ \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > \delta\big\}.$$

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è una funzione tale che

$$u = 0 \quad in \quad \Omega \setminus \Omega_\delta,$$

allora $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $\big\{\phi_\varepsilon\big\}_{\varepsilon>0}$ una famiglia di mollificatori tali che $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(B_\varepsilon)$. Quindi, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, la convoluzione $u * \phi_\varepsilon$ è una funzione C^∞ supportata in $\Omega_\delta + B_\varepsilon \subset \Omega$. Siccome $u * \phi_\varepsilon$ converge a u fortemente in $W^{1,p}$, abbiamo che $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Proposizione 11. *Sia $R > 0$ e sia B_R la palla di raggio R in $\mathbb{R}^d$. Allora, la funzione*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2d} \quad per\ ogni \quad x \in B_R \ ,$$

è la soluzione debole del problema

$$-\Delta u = 1 \quad in \quad B_R \ , \qquad u = 0 \quad su \quad \partial B_R \,.$$

Dimostrazione. Siccome

$$-\Delta(R^2 - |x|^2) = \Delta(|x|^2) = 2d,$$

abbiamo che per ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(B_R)$ si ha

$$\int_{B_R} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{B_R} \Big(\mathrm{div}(\varphi \nabla u) - \varphi \Delta u\Big) = \int_{\partial B_R} \varphi \frac{x}{R} \cdot \nabla u + \int_{B_R} \varphi(x)\, dx = \int_{B_R} \varphi(x)\, dx \,.$$

Quindi, basta dimostrare che $u \in H_0^1(B_R)$.

Per ogni $t \in (0, R)$ consideriamo la funzione

$$u_t(x) := \frac{1}{2d}\Big((R-t)^2 - |x|^2\Big)_+$$

Osserviamo che

$$u_t \in H^1(B_R) \qquad \text{e} \qquad \nabla u_t := \frac{x}{d}\mathbb{1}_{\{|x|<R-t\}}(x)\,.$$

Inoltre, per il lemma precedente, $u \in H_0^1(B_R)$. Ora, per il teorema della convergenza dominata, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0} u_t = u \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0} \partial_j u_t = \partial_j u \,,$$

fortemente in $L^2(B_R)$. Quindi $u \in H_0^1(B_R)$. □