Serie di Fourier ed equazione del calore

Serie di Fourier

Dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ consideriamo gli autovalori del Laplaciano di Dirichlet

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_k \le \dots$$

e le corrispondenti autofunzioni $\{\phi_k\}_{k\ge1}$ soluzioni (deboli) di

$$-\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \phi_k \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega \phi_k^2\,dx\,.$$

Osserviamo inoltre che la famiglia di autofunzioni $\{\phi_k\}_{k\ge1}$ è ortonormale, ovvero

$$\int_\Omega \phi_i\phi_j\,dx = \delta_{ij} \qquad \text{per ogni} \qquad i, j \ge 1,$$

e che è una base hilbertiana, ovvero per ogni funzione $w \in L^2(\Omega)$ si ha

$$w = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\phi_k \quad \text{fortemente in} \quad L^2(\Omega),$$

dove $\{c_k\}_{k\ge1}$ sono i coefficienti di Fourier

$$c_k := \int_\Omega w(x)\phi_k(x)\,dx\,.$$

Teorema 1. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $\{\phi_k\}_{k\ge1}$ la base di autofunzioni del Laplaciano di Dirichlet. Data una funzione $u \in L^2(\Omega)$ con coefficienti di Fourier*

$$c_k := \int_\Omega u(x)\phi_k(x)\,dx\,,$$

sono equivalenti:

(1) $u \in H^1_0(\Omega)$;

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j c_j^2 < +\infty$.

Inoltre, se sono verificate le condizioni (1) e (2), allora

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j c_j^2 \qquad e \qquad \nabla u = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\nabla\phi_k \quad \textit{fortemente in} \quad \big(L^2(\Omega)\big)^d.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che (1) implica (2). Poniamo

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k\,.$$

Siccome $u \in H_0^1(\Omega)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla P_n \, dx &= \sum_{k=1}^n c_k \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi_k \, dx \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_\Omega u_k \lambda_k \phi_k \, dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k c_k^2.\end{aligned}$$

Inoltre, per l'ortogonalità di ϕ_i e ϕ_j in $L^2(\Omega)$, abbiamo:

$$\int_\Omega \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = \int_\Omega \lambda_i \phi_i \phi_j \, dx = 0.$$

Quindi,

$$\int_\Omega |\nabla P_n|^2 \, dx = \sum_{j=1}^n c_j^2 \int_\Omega |\nabla \phi_j|^2 \, dx = \sum_{j=1}^n c_j^2 \lambda_j \int_\Omega \phi_j^2 \, dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2 \,.$$

Ed, in particolare,

$$\begin{aligned}0 \le \int_\Omega |\nabla (u - P_n)|^2 \, dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - 2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla P_n \, dx + \int_\Omega |\nabla P_n|^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2.\end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j c_j^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2 \le \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \,.$$

Dimostriamo ora che (2) implica (1). Usando di nuovo l'ortogonalità delle diverse funzioni ϕ_i e ϕ_j in $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, abbiamo che

$$\int_\Omega |\nabla (P_n - P_m)|^2 \, dx = \sum_{j=n+1}^m c_j^2 \int_\Omega |\nabla \phi_j|^2 \, dx = \sum_{j=n+1}^m c_j^2 \lambda_j \int_\Omega \phi_j^2 \, dx = \sum_{j=n+1}^m \lambda_j c_j^2 \,,$$

e quindi la successione P_n è di Cauchy in H^1. Esiste quindi una funzione $w \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$w = \lim_{n \to +\infty} P_n$$

fortemente in $H_0^1(\Omega)$. D'altra parte, siccome ϕ_i è una base di Fourier, abbiamo che

$$u = \lim_{n \to +\infty} P_n$$

fortemente in $L^2(\Omega)$. Quindi $u = w$.

Infine, se valgono (1) e (2), usando di nuovo l'identità

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla (u - P_n)|^2 \, dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - 2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla P_n \, dx + \int_\Omega |\nabla P_n|^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2,\end{aligned}$$

e mandando $n \to \infty$, otteniamo

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j c_j^2 \,.$$

□

Equazione del calore – definizione di soluzione debole

Ricordiamo la definizione seguente:

Definizione 2. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Dati un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ed una funzione $u : I \to \mathcal{B}$ diciamo che:*

- *$u \in C(I; \mathcal{B})$, se la funzione u è continua su I, ovvero se*

$$\lim_{s\to 0} \|u(t+s) - u(t)\|_{\mathcal{B}} = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in I\,;$$

- *$u \in C(I; \mathcal{B})$, se esiste una funzione $v \in C(I; \mathcal{B})$ tale che*

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{|s|} \|u(t+s) - u(t) - sv(t)\|_{\mathcal{B}} = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in I\,.$$

Definizione 3. *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Diciamo che la funzione*

$$u \in C\big([0,+\infty); L^2(\Omega)\big) \cap C^1\big((0,+\infty); L^2(\Omega)\big) \cap C\big((0,+\infty); H^1_0(\Omega)\big),$$

è una soluzione debole dell'equazione del calore con condizioni di Dirichlet e dato iniziale u_0, se:

- *per ogni $t > 0$, u_t è soluzione debole dell'equazione*

$$\Delta u_t = \partial_t u_t \quad \textit{in} \quad \Omega\,, \qquad u_t \in H^1_0(\Omega)\,;$$

- $\displaystyle\lim_{t\to 0} u_t = u_0 \quad \textit{fortemente in} \quad L^2(\Omega)\,.$

Equazione del calore - unicità

Proposizione 4 (Unicità delle soluzioni deboli)**.** *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Sia*

$$u \in C\big([0,+\infty); L^2(\Omega)\big) \cap C^1\big((0,+\infty); L^2(\Omega)\big) \cap C\big((0,+\infty); H^1_0(\Omega)\big),$$

una soluzione debole dell'equazione del calore

$$\begin{cases} \partial_t u_t = \Delta u_t \quad \textit{in} \quad \Omega \quad \textit{per ogni} \quad t > 0\,; \\ \displaystyle\lim_{t\to 0} u_t = u_0 \quad \textit{fortemente in} \quad L^2(\Omega)\,. \end{cases}$$

Allora, la funzione

$$M : [0,+\infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad M(t) := \int_\Omega u_t^2\,dx\,,$$

è decrescente e

$$M(t) \le \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-Ct} \qquad \textit{per ogni} \qquad t \ge 0\,,$$

dove $C > 0$ è una costante universale. In particolare, la soluzione dell'equazione del calore è unica.

Dimostrazione. Come nel caso unidimensionale, dimostriamo prima che la funione M sia derivabile su $(0,+\infty)$ e che

$$M'(t) = 2\int_\Omega \partial_t u_t(x) u_t(x)\,dx\,,$$

dove $\partial_t u : (0,+\infty) \to L^2(\Omega)$ è la derivata (nella variabile $t \in (0,+\infty)$) della funzione

$$u : (0,+\infty) \to L^2(\Omega)\,.$$

Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s}\Big(M(t+s)-M(t)\Big) &= \frac{1}{s}\int_\Omega \big(u_{t+s}^2-u_t^2\big)\,dx \\
&= \frac{1}{s}\int_\Omega \big(u_{t+s}-u_t\big)\big(u_{t+s}+u_t\big)\,dx \\
&= \int_\Omega \frac{u_{t+s}-u_t}{s}2u_t\,dx+\int_\Omega \frac{u_{t+s}-u_t}{s}\big(u_{t+s}-u_t\big)\,dx\,.
\end{aligned}
$$

Siccome abbiamo i limiti forti in $L^2(\Omega)$

$$
\lim_{s\to 0}\frac{u_{t+s}-u_t}{s}=\partial_t u_t \qquad \text{e} \qquad \lim_{s\to 0}\big(u_{t+s}-u_t\big)=0\,,
$$

otteniamo che

$$
M'(t)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Big(M(t+s)-M(t)\Big)=2\int_\Omega \partial_t u_t(x)u_t(x)\,dx\,.
$$

Siccome u_t (a t fissato) è soluzione debole di

$$
\partial_t u_t=\Delta u_t \quad \text{in} \quad \Omega\,,
$$

e siccome $u_t\in H_0^1(\Omega)$ è una funzione test ammissibile, abbiamo

$$
M'(t)=2\int_\Omega \partial_t u_t(x)u_t(x)\,dx=-2\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx\,.
$$

Per la disuguaglianza di Poincaré, esiste una costante $C>0$ tale che

$$
-M(t)=-\int_\Omega u_t^2\,dx\geq -C\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dx\,.
$$

Quindi,

$$
M'(t)\geq -\frac{2}{C}M(t)\,,
$$

e di conseguenza

$$
M(t)\leq e^{-\kappa t}M(0)=e^{-\kappa t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\,,
$$

dove $\kappa=2/C$. □

Equazione del calore - esistenza

Proposizione 5. *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e $u_0\in L^2(\Omega)$. Sia $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ la base hilbertiana di autofunzioni del Laplaciano di Dirichlet su Ω e siano $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ i corrispondenti autovalori. Siano c_k i coefficienti di Fourier di u_0 in questa base, ovvero:*

$$
u_0=\sum_{k=1}^{+\infty}c_k\phi_k \qquad \textit{fortemente in } L^2(\Omega),\ \textit{dove} \qquad c_k:=\int_\Omega u_0\phi_k\,dx\,.
$$

Per ogni $t\geq 0$, definiamo la funzione $u_t\in L^2(\Omega)$ come:

$$
u_t:=\sum_{k=1}^{+\infty}c_k e^{-t\lambda_k}\phi_k\,,
$$

dove la serie converge fortemente in $L^2(\Omega)$. Allora:

(1) *la funzione $u:[0,+\infty)\to L^2(\Omega)$, definita come $u(t)=u_t$, è continua;*

(2) *la funzione* $u : (0,+\infty) \to L^2(\Omega)$*, definita come* $u(t) = u_t$*, è derivabile in ogni* $t \in (0,+\infty)$ *e la sua derivata*

$$\partial_t u_t : (0,+\infty) \to L^2(\Omega)\,,$$

è una funzione continua;

(3) *per ogni* $t \in (0,+\infty)$*,* u_t *è in* $H^1_0(\Omega)$ *e la funzione*

$$u_t : (0,+\infty) \to H^1_0(\Omega)\,,$$

è continua su $(0,+\infty)$*;*

(4) *per ogni* $t \in (0,+\infty)$*, la funzione* u_t *è soluzione debole di*

$$\Delta u_t = \partial_t u_t \quad in \quad \Omega\ , \qquad u = 0 \quad su \quad \partial\Omega\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Siano $s \in [0,+\infty)$ e $t_n \to 0$ una successione tale che $t_n + s \in [0,+\infty)$. Allora,

$$u_{t_n+s} - u_s := \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-s\lambda_k}\Big(e^{-t_n\lambda_k} - 1\Big)\phi_k\,,$$

e quindi

$$\|u_{t_n+s} - u_s\|^2_{L^2(\Omega)} := \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2\Big(e^{-(t_n+s)\lambda_k} - e^{-s\lambda_k}\Big)^2.$$

Ora, per il teorema della convergenza dominata in ℓ^2, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{t_n+s} - u_s\|_{L^2(\Omega)} = 0\,.$$

Dimostriamo (2). Per ogni $t > 0$, definiamo la funzione

$$v_t \in L^2(\Omega)\ , \qquad v_t := \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(-\lambda_k)e^{-t\lambda_k}\phi_k\,,.$$

Come nel punto precedente, abbiamo che

$$v : (0,+\infty) \to L^2(\Omega)\ , \qquad v(t) = v_t\ ,$$

è una funzione continua su $(0,+\infty)$. Ora, basta dimostrare che

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{|s|}\|u(t+s) - u(t) - sv(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|s|^2}\|u(t+s) - u(t) - sv(t)\|^2_{L^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2\left(\frac{e^{-(t+s)\lambda_k} - e^{-t\lambda_k} - s(-\lambda_k)e^{-t\lambda_k}}{s}\right)^2\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 e^{-2t\lambda_k}\left(\frac{e^{-s\lambda_k} - 1 + s\lambda_k}{s}\right)^2.\end{aligned}$$

Per concludere, osserviamo che applicando due volte Lagrange, si ha

$$|e^{-s\lambda_k} - 1 + s\lambda_k| \le \lambda_k^2|s|^2 e^{|s|\lambda_k}.$$

Dimostriamo (3). Siccome

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2\lambda_k e^{-2t\lambda_k} < +\infty \quad \text{per ogni} \quad t \in (0,+\infty)\,,$$

abbiamo che $u_t \in$

$$u_t \in H^1_0(\Omega) \quad \text{per ogni} \quad t \in (0,+\infty)\,.$$

Per dimostrare la continuità della funzione

$$u : (0,+\infty) \to H^1_0(\Omega),$$

basta dimostrare che se $s > 0$ e $t_n \to 0$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \|\nabla(u_{t_n+s} - u_s)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Infatti

$$\nabla u_{t_n+s} - \nabla u_s := \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-s\lambda_k}\Big(e^{-t_n\lambda_k} - 1\Big)\nabla\phi_k\,,$$

e quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\|\nabla u_{t_n+s} - \nabla u_s\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2\Big(e^{-(t_n+s)\lambda_k} - e^{-s\lambda_k}\Big)^2 \|\nabla\phi_k\|^2_{L^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2\Big(e^{-t_n\lambda_k} - 1\Big)^2 \lambda_k e^{-s\lambda_k}\,.\end{aligned}$$

La conclusione segue di nuovo dal teorema della convergenza dominata in ℓ^2.

Infine, dimostriamo (4). Fissiamo $t > 0$. Per ogni $n \geq 1$, definiamo

$$P_n := \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-\lambda_k t}\phi_k \qquad \text{e} \qquad Q_n := \sum_{k=1}^{n} c_k(-\lambda_k)e^{-\lambda_k t}\phi_k\,.$$

Allora, abbiamo che

$$\begin{aligned} P_n &\to u_t \quad \text{fortemente in } H^1_0(\Omega),\\ Q_n &\to v_t \quad \text{fortemente in } L^2(\Omega).\end{aligned}$$

D'altra parte, usando le equazioni per ϕ_k, $k = 1,\dots,n$, abbiamo che

$$\Delta P_n = Q_n \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

Quindi, passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo

$$\Delta u_t = \partial_t u_t \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

□