Oscillazione e continuità Hölder

Nel teorema di De Giorgi mostreremo che l'ocillazione della soluzione (di una PDE in forma di divergenza) decade nel passaggio da una palla grande a una più piccola. È ben noto che questa stima implica la continuità Hölder della soluzione. Infatti, si ha il seguente lemma.

Proposizione 1 (Oscillazione e continuità)**.** *Sia $u : B_R \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che:*

(a) $\|u\|_{L^\infty(B_R)} \le M$*;*

(b) *esiste una costante $c \in (0,1)$ tale che per ogni $x \in B_{R/2}$ ed ogni raggio $r \le \dfrac{R}{4}$ si ha*

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x)} u \le (1-c) \operatorname*{osc}_{B_{2r}(x)} u\,.$$

Allora, esiste una costante $\alpha \in (0,1)$, che dipende solo da c, tale che

$$|u(x)-u(y)| \le \frac{M}{R^\alpha} C|x-y|^\alpha \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in B_{R/4},$$

dove C è una costante che dipende solo da c. Precisamente

$$C = \frac{2}{(1-c)^2}.$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\varphi(x,r) := \operatorname*{osc}_{B_r(x)} u.$$

Allora:

- la funzione $r \mapsto \varphi(r,x)$ è crescente in r ;
- $\varphi(x,r) \le \varphi(y,R)$, se $B_r(x) \subset B_R(y)$;
- se $0 < s < t \le r$, allora

$$\Big| \fint_{B_s(x)} u - \fint_{B_t(x)} u \Big| \le \varphi(r,x).$$

Definiamo

$$r_n = R2^{-n}.$$

Allora

$$\varphi(x, r_{n+1}) \le (1-c)\varphi(x, r_n),$$

e di conseguenza,

$$\varphi(x, r_n) \le (1-c)^{n-1}\varphi(x, r_1) = (1-c)^{n-1}\varphi\left(x, {}^R\!/_2\right) \le 2M(1-c)^{n-1}.$$

Supponiamo che

$$r_{n+1} \le r \le r_n.$$

Allora, scegliendo $\sigma > 0$ tale che

$$2^{-\sigma} = 1-c,$$

abbiamo

$$\varphi(x,r) \le \varphi(x,r_n) \le 2M(1-c)^{n-1} \le 2M\,\left(2^{-(n-1)}\right)^\sigma = \frac{2^{1+2\sigma}M}{R^\sigma} r_{n+1}^\sigma \le \frac{2^{1+2\sigma}M}{R^\sigma} r^\sigma.$$

In conclusione, per ogni $0 < r \le {}^R\!/_2$ ed ogni $x \in B_{R/2}$, abbiamo

$$\varphi(x,r) \le \frac{2^{1+2\sigma}M}{R^\sigma} r^\sigma.$$

Come conseguenza, abbiamo che:

- ogni punto $x \in B_{R/2}$ è un punto di Lebesgue e

$$u(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} u\,;$$

- per ogni $x, y \in B_{R/2}$ si ha
$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2^{1+2\sigma} M}{R^\sigma} |x - y|^\sigma.$$

$\square$