Spazi di Sobolev - domande frequenti

Analisi funzionale – spazi di Banach, spazi di Hilbert, spazi L^p

(1) Lo spazio duale di uno spazio di Banach: definizione, norma e completezza (capitolo 1, parte 1.2).

(2) Disuguaglianza di Clarkson e teorema di rappresentazione di Riesz: il duale di L^p, $p \in (1,+\infty)$ è L^q, con $q = \frac{p}{p-1}$ (capitolo 1, parte 1 e parte 1.1).

(3) Ogni successione limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente (cap. 1, parte 2, teo 8).

(4) Semicontinuità della norma L^p rispetto alla convergenza debole e teorema di Radon-Riesz (cap.1, parte2).

(5) Teorema di Hahn-Banach (capitolo 1, parte 2.1).

(6) Gli sottospazi chiusi di uno spazio di Banach sono chiusi rispetto alla convergenza debole (cap.2 - 10.1).

(7) Le successioni debolmente convergenti (in uno spazio di Banach) sono limitate (capitolo 1, parte 2.2).

(8) Un operatore $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è continuo se e solo se l'immagine di ogni successione debolmente convergente è una successione debolmente convergente (capitolo 3, parte 8, teorema 7).

(9) Operatori compatti $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ - definizioni equivalenti (capitolo 3, parte 8, teorema 11).

(10) Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti (capitolo 3, parte 8).

Funzioni di Sobolev di una variabile

(11) Teorema di rappresentazione delle funzioni di Sobolev (capitolo 2, parte 4): Per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ esiste una funzione continua $\widetilde{u} : I \to \mathbb{R}$ tale che $\widetilde{u} = u$ quasi-ovunque in I e

$$\widetilde{u}(y) - \widetilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)\,dt \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in I.$$

(12) Traslazioni e caratterizzazione dello spazio $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (capitolo 2, parte 5): Data una funzione $u \in L^p(\mathbb{R})$ con $p \in (1,+\infty)$, sono equivalenti:

(1) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$;

(2) esiste una costante $C > 0$ tale che:

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R})} \le C|h| \qquad \text{per ogni} \qquad h \in \mathbb{R}\,.$$

(13) Teorema di estensione da $W^{1,p}(a,b)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (capitolo 2, parte 6): Dati un intervallo aperto limitato $I \subset \mathbb{R}$ e $p \in (1,+\infty)$, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ esiste $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con le seguenti proprietà:

$$\widetilde{u} = u \quad \text{su} \quad I\ ; \qquad \|\widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\|u\|_{L^p(I)}\ ; \qquad \|\widetilde{u}'\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)}\ .$$

(14) Approssimazione delle funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R})$ con funzioni regolari (capitolo 2, parte 7): Per $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, $p \in (1,+\infty)$, esiste una successione $u_n \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

(15) Limitatezza delle funzioni $W^{1,p}(I)$ (capitolo 2, parte 8, teorema 2 nel caso $p \in (1,+\infty)$): Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1,+\infty)$. Allora, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ e

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(I).$$

Inoltre, se I è limitato, allora le successioni limitate in $W^{1,p}$ ($p > 1$) sono compatte in L^∞ (capitolo 2, parte 8, teorema 4 e teorema 7).

(16) Prodotto tra funzioni di Sobolev (capitolo 2, parte 8.1): Se $u \in W^{1,p}(I)$ e $v \in W^{1,p}(I)$, con $p \in (1,+\infty)$, allora $uv \in W^{1,p}(I)$ e $(uv)' = u'v + uv'$.

(17) Parte positiva di una funzione di Sobolev (capitolo 2, parte 9, parte 9.1): Dimostare che se $u \in W^{1,p}(I)$, allora per ogni funzione $G \in C^1$, $G(u) \in W^{1,p}(I)$. Di conseguenza, $u_+ \in W^{1,p}(I)$ e $(u_+)' = \mathbb{1}_{\{u>0\}}\, u'$.

(18) Gli spazi $W^{1,p}_0(I)$ (capitolo 2, parte 10). Definire $W^{1,p}_0(I)$ e mostrare che una funzione $u \in W^{1,p}(I)$ è in $W^{1,p}_0(I)$ se e solo se è zero negli estremi di I.

(19) Serie di Fourier e gli spazi H^1 ed H^1_0 su un intervallo limitato (capitolo 2, parte 15).

Spazi di Sobolev in dimensione superiore

(20) Densità delle funzioni C^∞ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ (capitolo 3, parte 4).

(21) Teorema di Rellich:
- per funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ a supporto in B_R (capitolo 3, parte 5);
- per funzioni in $W_0^{1,p}(\Omega)$ con Ω limitato;
- per funzioni in $W_0^{1,p}(\Omega)$ con Ω di misura finita (capitolo 3, parte 15.1).

(22) Teorema di estensione 1. Per ogni $u \in W^{1,p}(B_R)$, $p \in (1, +\infty)$, esiste una funzione $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tale che: $\widetilde{u} \equiv u$ in B_R; $\widetilde{u} \equiv 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus B_{2R}$; $\|\nabla \widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C_{d,p}\big(\|u\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}\big)$.

(23) Teorema di estensione 2. Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e limitato di classe C^1. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste una funzione $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ che estende u ed è tale che

$$\|\nabla \widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C_{d,p}\big(\|u\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}\big).$$

(24) Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger: su palle e su insiemi regolari (capitolo 3, parti 12 e 12.1).

(25) Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (immersione di $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in $L^{p*}(\mathbb{R}^d)$ per $p < d$).

(26) Immersione di Sobolev nel caso critico $p = d$:
- $W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ per ogni $q > d$;
- Non esiste una costante $C = C(d)$ tale che: $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le C\|u\|_{W^{1,d}(\mathbb{R}^d)}$ per ogni $u \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$.

(27) Teorema della traccia in B_R.

(28) Teorema della traccia in insiemi di classe C^1.

(29) Lemma di Morrey; continuità e limitatezza delle funzioni $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ nel caso $p > d$.

(30) Teorema di Gagliardo, disuguaglianza integrale di Hardy e disuguaglianza integrale di Minkowski.