Esame orale AM1
Definizioni ed esempi

Successioni

Domanda 1. *Definizione di successione convergente di numeri reali*

Risposta:

Diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ *e scriviamo* $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$, *se:*

per ogni $\varepsilon > 0$
esiste $N \in \mathbb{N}$ *tale che*
$|a_n - L| < \varepsilon$ *per ogni* $n \geq N$.

Domanda 2. *Definizione di successione divergente*

Risposta:

Diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge a più infinito e scriviamo* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, *se:*

per ogni $M > 0$
esiste $N \in \mathbb{N}$ *tale che*
$a_n > M$ *per ogni* $n \geq N$.

Domanda 3. *Definizione di successione limitata*

Risposta:

Diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n\geq 1}$ *è limitata, se:*

esiste $M \in \mathbb{R}$ *tale che* $|a_n| \leq M$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Domanda 4. *Definizione di successione limitata superiormente*

Risposta:

Diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n\geq 1}$ *è limitata superiormente, se:*

esiste $M \in \mathbb{R}$ *tale che* $a_n \leq M$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Domanda 5. *Definizione di successione limitata inferiormente*

Risposta:

Diciamo che una successione di numeri reali $(a_n)_{n\geq 1}$ *è limitata inferiormente, se:*

esiste $M \in \mathbb{R}$ *tale che* $a_n \geq M$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Domanda 6. *Esempio di successione convergente*

Una possibile risposta.

La successione $(a_n)_{n\geq 1}$ *definita come* $a_n = \frac{1}{n}$ *converge a zero:* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Per dimostrare questa affermazione, bisogna verificare che:

$$\text{"per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } N > 0 \text{ tale che } |a_n - 0| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq N\text{"}.$$

Dimostrazione: *Sia* $\varepsilon > 0$ *un qualsiasi numero reale dato. Siccome l'insieme dei numeri naturali* $\mathbb{N}$ *non è limitato, esiste un numero naturale* $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $N \geq \dfrac{47}{\varepsilon}$. *Prendiamo un qualsiasi numero naturale* N *con questa proprietà.*

Per concludere la dimostrazione (del fatto che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$*) bisogna verificare che vale la proprietà seguente:*

$$|a_n - 0| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq N.$$

Per fare ciò, prendiamo un qualsiasi numero naturale $n \geq N$*:*

- *Per la definizione di* a_n*, abbiamo che* $|a_n| = \dfrac{1}{n}$*;*
- *Siccome* $n \geq N$*, si ha che* $\dfrac{1}{N} \leq \dfrac{1}{n}$*. Quindi*
$$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}.$$
- *Per la scelta di* N *(che abbiamo fatto sopra), abbiamo* $\frac{47}{\varepsilon} < N$*. Quindi* $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{47}$ *e di conseguenza otteniamo:*
$$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{47}.$$
- *Siccome* $47 > 1$*, abbiamo che* $\dfrac{\varepsilon}{47} < \varepsilon$ *e quindi otteniamo*
$$|a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{47} < \varepsilon.$$

In conclusione, abbiamo mostrato che

$$|a_n - 0| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \geq N.$$

Questo conlude la dimostrazione.

Risposta 2. *La successione* $(a_n)_{n\geq 1}$ *definita come* $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ *converge a* 2*,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2.$$

Per dimostrare questa affermazione, bisogna verificare che:

$$\text{"per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } N > 0 \text{ tale che } |a_n - 2| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq N\text{"}.$$

Dimostrazione: *Sia* $\varepsilon > 0$ *un qualsiasi numero reale dato. Siccome l'insieme dei numeri naturali* $\mathbb{N}$ *non è limitato, esiste un numero naturale* $N \in \mathbb{N}$ *tale che* $N \geq \dfrac{100}{\varepsilon}$. *Prendiamo un qualsiasi numero naturale* N *con questa proprietà.*

Per concludere la dimostrazione del fatto che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 0$*, bisogna verificare che vale la proprietà seguente:*

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \textit{per ogni} \quad n \geq N.$$

Per fare ciò, prendiamo un qualsiasi numero naturale n *tale che* $n \geq N$*:*

- *Per la definizione di* a_n*, abbiamo che:*
$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n+1}{n} - \frac{2n}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

- *Siccome* $n \geq N$*, si ha che* $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{n}$*. Quindi*
$$|a_n - 2| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}.$$

- *Per la scelta di* N *(che abbiamo fatto sopra), abbiamo* $\frac{100}{\varepsilon} < N$*. Quindi* $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{100}$ *e di conseguenza otteniamo:*
$$|a_n - 2| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{100}.$$

- *Siccome* $47 > 1$*, abbiamo che* $\frac{\varepsilon}{100} < \varepsilon$ *e quindi otteniamo*
$$|a_n - 2| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{100} < \varepsilon.$$

In conclusione, abbiamo mostrato che

$$|a_n - 2| < \varepsilon \textit{ per ogni } n \geq N.$$

Questo conlude la dimostrazione.

Domanda 7. *Esempio di successione limitata ma non convergente*

Una possibile risposta: La successione $(a_n)_{n\geq 1}$ definita come $a_n = (-1)^n$ è limitata, ma non è convergente.
Dimostrazione: Mostreremo che la successione $(a_n)_{n\geq 1}$ non è convergente. Supponiamo, per assurdo, che esiste un numero reale $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo:

$$|1 - L| + |L - (-1)| \geq |1 - (-1)| = 2.$$

Di conseguenza, abbiamo che almeno una delle disuguaglianze seguenti deve essere verificata:

$$|1 - L| \geq 1 \qquad \text{oppure} \qquad |L - (-1)| \geq 1.$$

Consideriamo due casi.
Caso 1. $|1 - L| \geq 1$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$. Per la definizione di successione convergente, abbiamo che:

"per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$."

Scegliamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Per la proprietà di sopra, dovrebbe esistere un $N > 0$ tale che

$$|a_n - L| < \tfrac{1}{2} \text{ per ogni } n \geq N.$$

In particolare, dovrebbe essere vero che

$$|a_n - L| < \tfrac{1}{2} \text{ per ogni numero naturale } \underline{\text{pari}}\ n \geq N.$$

D'altro canto, se n è pari, allora $a_n = (-1)^n = 1$. Di conseguenza,

$$|1 - L| < \frac{1}{2},$$

ma questa disuguaglianza è in contradizione con $|1 - L| \geq 1$. Quindi è impossibile che allo stesso tempo $|1 - L| \geq 1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.

Caso 2. $|L + 1| \geq 1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. La dimostrazione è analoga a quella del caso precedente. Per la definizione di successione convergente, abbiamo che:

"per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$."

Scegliamo $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Per la proprietà di sopra, dovrebbe esistere un $N > 0$ tale che

$$|a_n - L| < \tfrac{1}{2} \text{ per ogni } n \geq N.$$

In particolare, dovrebbe essere vero che

$$|a_n - L| < \tfrac{1}{2} \text{ per ogni numero naturale } \underline{\text{dispari}}\ n \geq N.$$

Per la definizione di a_n si ha che, se n è dispari, allora $a_n = (-1)^n = -1$. Di conseguenza,

$$|(-1) - L| < \frac{1}{2},$$

ma questa disuguaglianza è in contradizione con $|L + 1| \geq 1$. Quindi è impossibile che allo stesso tempo $|L + 1| \geq 1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.

Conclusione. Abbiamo assunto che la successione a_n converge ad un certo numero reale $L \in \mathbb{R}$. Usando la disuguaglianza triangolare, abbiamo ottenuto che

$$|L - 1| \geq 1 \quad \text{oppure} \quad |L + 1| \geq 1.$$

Usando la definizione del limite abbiamo dimostrato che le proprietà

$$|L - 1| \geq 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

non possono essere verificate conteporaneamente.

Analogamente, non è possibile avere nello stesso tempo

$$|L + 1| \geq 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

In conclusione, non è possibile che la successione a_n converga ad un limite $L \in \mathbb{R}$.

Domanda 8. *Esempio di una successione che tende a* $+\infty$

Una possibile risposta: La successione $(a_n)_{n\geq 1}$ definita come $a_n = 2n + 1$ converge a più infinito:

$$\lim_{n\to+\infty} (2n + 1) = +\infty.$$

Dimostrazione: Dato $M \in \mathbb{R}$ bisogna dimostrare che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni numero naturale} \quad n \geq N.$$

Scegliamo $N = \dfrac{M + 700}{2}$. Mostreremo che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni numero naturale} \quad n \geq N.$$

Infatti, per la definizione di a_n abbiamo che:

- per ogni $n \geq N$
$$a_n = 2n + 1 \geq 2N + 1.$$
- per la definizione di N abbiamo che
$$2N + 1 = 2\frac{M + 700}{2} + 1 = M + 700 + 1 > M.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze, abbiamo
$$a_n = 2n + 1 \geq 2N + 1 > M,$$
che conclude la dimostrazione.

Risposta 2. La successione $(a_n)_{n\geq 1}$ definita come $a_n = 3n - 7$ converge a più infinito:
$$\lim_{n\to+\infty}(3n - 7) = +\infty.$$

Dimostrazione: Dato $M \in \mathbb{R}$ bisogna dimostrare che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:
$$a_n \geq M \quad \text{per ogni numero naturale} \quad n \geq N.$$
Scegliamo un qualsiasi numero naturale N tale che $N \geq \dfrac{M + 50}{3}$. Mostreremo che
$$a_n \geq M \quad \text{per ogni numero naturale} \quad n \geq N.$$
Infatti, per la definizione di a_n abbiamo che:

- per ogni $n \geq N$
$$a_n = 3n - 7 \geq 3N - 7.$$
- per la scelta di N abbiamo che
$$3N - 7 \geq 3\frac{M + 50}{3} - 7 = M + 50 - 7 = M + 43 > M.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze, abbiamo
$$a_n = 3n - 7 \geq 3N - 7 > M,$$
che conclude la dimostrazione.

Domanda 9. *Esempio di una successione che converge a meno infinito.*

Una possibile risposta: La successione $(a_n)_{n\geq 1}$, definita come $a_n = -2n+3$, tende a meno infinito:
$$\lim_{n\to+\infty}(-2n + 3) = -\infty.$$

Dimostrazione: Dato $M \in \mathbb{R}$ bisogna dimostrare che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:
$$a_n \leq M \quad \text{per ogni numero naturale} \quad n \geq N.$$
Scegliamo un qualsiasi numero naturale N tale che $N \geq \dfrac{-M + 46}{2}$. Mostreremo che
$$a_n \leq M \quad \text{per ogni numero naturale} \quad n \geq N.$$
Infatti, per la definizione di a_n abbiamo che:

- per ogni $n \geq N$
$$a_n = -2n + 3 \leq -2N + 3.$$
- per la scelta di N abbiamo che
$$-2N + 3 \leq -2\frac{(-M + 46)}{2} + 3 = -(-M + 46) + 3 = M - 46 + 3 = M - 43 < M.$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze, abbiamo

$$a_n = -2n + 3 \leq -2N + 3 < M,$$

che conclude la dimostrazione.

Domanda 10. *Esempio di una successione non limitata che non tende ne a più infinito ne a meno infinito.*

Una possibile risposta: La successione $(a_n)_{n\geq 1}$ definita come $a_n = (-1)^n n$ non converge ne a $+\infty$, ne a $-\infty$.
Dimostrazione: ...

Successioni di numeri complessi.

Domanda 11. *Definizione di successione convergente di numeri complessi*

Risposta:

Diciamo che una successione di numeri complessi $(z_n)_{n\geq 1}$ converge ad un limite $L \in \mathbb{C}$ e scriviamo $\lim_{n\to+\infty} z_n = L$, se:

per ogni $\varepsilon > 0$
esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che
$|z_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.

Domanda 12. *Definizione di successione limitata di numeri complessi*

Risposta:

Diciamo che una successione di numeri complessi $(z_n)_{n\geq 1}$ è limitata, se:

esiste un numero reale $M \geq 0$ tale che $|z_n| < M$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Insiemi di numeri reali limitati superiormente e inferiormente.
Minimo, massimo, estremo superiore e estremo inferiore.

Domanda 13. *Definizione di insieme limitato*

Risposta:

Diciamo che un insieme A di numeri reali è limitato, se:

esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|a| \leq M$ per ogni elemento $a \in A$.

Domanda 14. *Definizione di insieme limitato superiormente*

Risposta:

Diciamo che un insieme A di numeri reali è limitato superiormente, se:

esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq M$ per ogni elemento $a \in A$.

Domanda 15. *Definizione di insieme limitato inferiormente*

Risposta:

Diciamo che un insieme A di numeri reali è limitato inferiormente, se:

esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $a \geq M$ per ogni elemento $a \in A$.

Domanda 16. *Definizione di minimo*

Risposta:

Sia A un insieme di numeri reali e sia $m \in \mathbb{R}$.
Diciamo che m è un minimo di A e scriviamo $m = \min A$, se:

- *m è un elemento di A ($m \in A$);*
- *$m \leq a$ per ogni $a \in A$.*

Domanda 17. *Definizione di massimo*

Risposta:

Sia A un insieme di numeri reali e sia $M \in \mathbb{R}$.
Diciamo che M è un massimo di A e scriviamo $M = \max A$, se:

- *M è un elemento di A ($M \in A$);*
- *$M \geq a$ per ogni $a \in A$.*

Domanda 18. *Definizione di maggiorante*

Risposta:

Sia A un insieme di numeri reali e sia $M \in \mathbb{R}$. Diciamo che M è un maggiorante di A, se:

$$M \geq a \text{ per ogni } a \in A.$$

Domanda 19. *Definizione di minorante*

Risposta:

Sia A un insieme di numeri reali e sia $m \in \mathbb{R}$. Diciamo che m è un minorante di A, se:

$$m \leq a \text{ per ogni } a \in A.$$

Domanda 20. *Definizione di estremo superiore*

Risposta:

Sia A un insieme di numeri reali.

- *Se A è un insieme limitato superiormente, definiamo l'estremo superiore,* $\sup A$, *come il più piccolo maggiorante di A:*

$$\sup A = \min\{M \in \mathbb{R} \ : \ M - \textit{maggiorante di } A\}.$$

- *Se l'insieme A non è limitato superiormente, allora per convenzione*

$$\sup A = +\infty.$$

Domanda 21. *Definizione di estremo inferiore*

Risposta:

Sia A un insieme di numeri reali.

- *Se A è un insieme limitato inferiormente, definiamo l'estremo inferiore,* $\inf A$, *come il più grande minorante di A:*

$$\inf A = \max\{m \in \mathbb{R} \ : \ m - \textit{maggiorante di } A\}.$$

- *Se l'insieme A non è limitato inferiormente, allora per convenzione*

$$\inf A = -\infty.$$

Domanda 22. *Dare un esempio di un insieme limitato superiormente ma non inferiormente.*

Possibile risposta: L'insieme $A = \{-n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ è limitato superiormente ma non inferiormente.

Dimostrazione: Perché l'insieme A è limitato superiormente? Perché l'insieme A non è limitato inferiormente?

Domanda 23. *Esempio di un insieme limitato inferiormente ma non superiormente*

Possibile risposta: L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è limitato inferiormente ma non superiormente.

Dimostrazione: L'insieme $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente perché 0 è un minorante di $\mathbb{N}$. Infatti, $n \geq 0$ per ogni elemento $n \in \mathbb{N}$. L'insieme $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente per il Teorema (o Principio) di Archimede.

Domanda 24. *Esempio di un insieme non limitato superiormente ne inferiormente*

Possibile risposta: L'insieme

$$A = \{(-1)^n n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

non è limitato ne superiormente ne inferiormente.

Dimostrazione: Dimostriamo prima che A non sia limitato superiormente. Supponiamo, per assurdo, che esiste un maggiornate M di A. Per il Principio di Archimede sappiamo che esiste un numero naturale n tale che $n > M$.

- Se n è pari, consideriamo l'elemento $(-1)^n n \in A$. Abbiamo che

  $$(-1)^n n = n > M$$

  e quindi non è possibile che M sia un maggiorante di A.

- Se n è dispari, allora $n+1$ è pari. Prendiamo quindi l'elemento $(-1)^{n+1}(n+1) \in A$ e calcoliamo

  $$(-1)^{n+1}(n+1) = n+1 > n > M,$$

  quindi anche in questo caso non è possibile che M sia un maggiorante di A.

Domanda 25. *Esempio di un insieme (con infiniti elementi) che ammette un minimo*

Possibile risposta: L'insieme

$$A = \{2n+1 \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3\},$$

ammette un minimo, $\min A = 7$.

Dimostrazione: Verifichiamo prima che $7 \in A$. Infatti, $7 = 2 \cdot 3 + 1$ e $2 \cdot 3 + 1$ è un elemento di A. Verifichiamo ora che 7 è un minorante di A. Infatti, per ogni $n \geq 3$, abbiamo

$$2 \cdot n + 1 \geq 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Quindi 7 è anche un minorante di A. In conclusione 7 è il minimo di A.

Domanda 26. *Esempio di un insieme (con infiniti elementi) che ammette un massimo*

Possibile risposta: L'insieme

$$A = \{-2n+3 \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 5\},$$

ammette un massimo, $\max A = -7$.

Dimostrazione: Verifichiamo prima che $-7 \in A$. Infatti, $7 = -2 \cdot 5 + 3$ e $-2 \cdot 5 + 3$ è un elemento di A. Verifichiamo ora che -7 è un maggiorante di A. Infatti, per ogni $n \geq 5$, abbiamo

$$-2 \cdot n + 3 \leq -2 \cdot 5 + 3 = -7.$$

Quindi -7 è anche un maggiorante di A. In conclusione 7 è il massimo di A.

Domanda 27. *Esempio di un insieme che non ammette un massimo, ma è limitato superiormente.*

Possibile risposta: L'insieme

$$A = \{-\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 5\},$$

è limitato superiormente, ma non ammette un massimo.

Dimostrazione: Verifichiamo prima che A sia limitato superiormente. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo che $-\frac{1}{n} < 0$. Quindi 0 è un maggiornate di A. Quindi l'insieme A è limitato superiormente.

Dimostriamo, ora, che A non ammette un massimo. Supponiamo per assurdo che M sia un massimo di A. In particolare, questo vuol dire che M è un elemento di A e che quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$M = -\frac{1}{n}$$

Consoderiamo l'elemento $-\frac{1}{n+1}$ di A. Siccome $n + 1 > n$, abbiamo che

$$-\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n} = M.$$

Quindi M non è un maggiorante di A. Di conseguenza, non è possibile che M sia un massimo di A, in contraddizione con la nostra ipotesi.

Domanda 28. *Esempio di un insieme che non ammette un minimo, ma è limitato inferiormente.*

Possibile risposta: L'insieme

$$A = \{\frac{1}{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3\},$$

è limitato inferiormente, ma non ammette un minimo.

Dimostrazione: Verifichiamo prima che A sia limitato inferiormente. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo che $\frac{1}{2n} > 0$. Quindi 0 è un minorante di A. Quindi l'insieme A è limitato inferiormente.

Dimostriamo, ora, che A non ammette un minimo. Supponiamo per assurdo che m sia un minimo di A. In particolare, m deve essere un elemento di A e quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$m = \frac{1}{2n}$$

Consoderiamo l'elemento $\frac{1}{2(n+1)}$ di A. Siccome $n + 1 > n$, abbiamo che

$$\frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{2n} = m.$$

Quindi m non è un minorante di A. Di conseguenza, non è possibile che M sia un minimo di A.

Domanda 29. *Sia A un insieme di numeri reali che ammette un massimo. Dimostrare che il massimo di A è unico.*

Risposta: Supponiamo che M_1 e M_2 siano due massimi di A.
Siccome M_1 è un maggiorante di A e M_2 è un elemento di A, abbiamo che $M_1 \geq M_2$.
Viceversa, siccome M_2 è un maggiorante di A e M_1 è un elemento di A, abbiamo che $M_2 \geq M_1$.
Di conseguenza, abbiamo che $M_1 = M_2$ e quindi il massimo di A è unico.

Domanda 30. *Sia A un insieme di numeri reali che ammette un minimo. Dimostrare che il minimo di A è unico.*

Risposta: Supponiamo che m_1 e m_2 siano due minimi di A.
Siccome m_1 è un minorante di A e m_2 è un elemento di A, abbiamo che $m_1 \leq m_2$.
Viceversa, siccome m_2 è un maggiorante di A e m_1 è un elemento di A, abbiamo che $m_2 \leq m_1$.
Di conseguenza, abbiamo che $m_1 = m_2$ e quindi il massimo di A è unico.

Domanda 31. *Sia A un insieme di numeri reali limitato superiormente.*
Dimostrare che A ammette un estremo superiore.

Risposta: Sia $\mathcal{M}$ l'insieme dei maggioranti di A, cioè

$$\mathcal{M} = \{m \in \mathbb{R} \ : \ m \geq a \ \text{ per ogni } \ a \in A\}.$$

Siccome A è limitato superiormente, $\mathcal{M}$ non è l'insieme vuoto.
Inoltre, per la definizione di $\mathcal{M}$, abbiamo che

$$a \leq m \quad \text{per ogni} \quad a \in A \quad \text{e} \quad m \in \mathcal{M}.$$

Per l'assioma di completezza dei numeri reali, esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq m \quad \text{per ogni} \quad a \in A \quad \text{e} \quad m \in \mathcal{M}.$$

In particolare, c è un maggiorante di A è un minorante di $\mathcal{M}$. Di conseguenza, $c \in \mathcal{M}$ e c è un minorante di $\mathcal{M}$ e quindi c è un (in realtà, il) minimo di $\mathcal{M}$. Per definizione (di estremo superiore), c è un estremo superiore di A.

Domanda 32. *Sia A un insieme di numeri reali limitato superiormente e che quindi ammette un estremo superiore. Dimostrare che l'estremo superiore è unico.*

Risposta: Siano S_1 e S_2 due estremi superiori di A. Per definizione, S_1 e S_2 sono due minimi dell'insieme $\mathcal{M}$ dei maggioranti di A. Siccome S_1 è un elemento di $\mathcal{M}$ e S_2 è un minorante di $\mathcal{M}$, abbiamo che $S_1 \geq S_2$. Viceversa, siccome S_2 è un elemento di $\mathcal{M}$ e S_1 è un minorante di $\mathcal{M}$, abbiamo che $S_2 \geq S_1$. Di conseguenza, $S_1 = S_2$ e quindi l'estremo superiore è unico.

Domanda 33. *Sia A un insieme di numeri reali limitato inferiormente.*
Dimostrare che A ammette un estremo inferiore.

Risposta: Sia μ l'insieme dei minoranti di A, cioè

$$\mu = \{m \in \mathbb{R} \ : \ m \leq a \ \text{ per ogni } \ a \in A\}.$$

Siccome A è limitato inferiormente, μ non è l'insieme vuoto.
Inoltre, per la definizione di μ, abbiamo che

$$m \leq a \quad \text{per ogni} \quad a \in A \quad \text{e} \quad m \in \mu.$$

Per l'assioma di completezza dei numeri reali, esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$m \leq c \leq a \quad \text{per ogni} \quad a \in A \quad \text{e} \quad m \in \mu.$$

In particolare, c è un minorante di A è un maggiorante di μ. Di conseguenza, $c \in \mu$ e c è un maggiorante di μ e quindi c è un (in realtà, il) massimo di μ. Per definizione (di estremo inferiore), c è un estremo inferiore di A.

Domanda 34. *Sia A un insieme di numeri reali limitato inferiormente e che quindi ammette un estremo inferiore. Dimostrare che l'estremo inferiore è unico.*

Risposta: Siano s_1 e s_2 due estremi inferiori di A. Per definizione, s_1 e s_2 sono due massimi dell'insieme μ dei minoranti di A. Siccome s_1 è un elemento di μ e s_2 è un maggiorante di μ, abbiamo che $s_1 \leq s_2$. Viceversa, siccome s_2 è un elemento di μ e s_1 è un maggiorante di μ, abbiamo che $s_2 \leq s_1$. Di conseguenza, $s_1 = s_2$ e quindi l'estremo inferiore è unico.

Domanda 35. *Supponiamo che l'insieme A sia tale che* $\inf A = \max A$. *Quanti elementi ha A?*

Risposta:

Funzioni. Limiti e derivate.

Domanda 36. *Definizione di punto di aderenza di un insieme di numeri reali*

Risposta: Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Diciamo che x_0 è un punto di aderenza per A, se

$$\text{per ogni } \delta > 0 \text{ esiste } a \in A \text{ tale che } |x_0 - a| < \delta.$$

Domanda 37. *Definizione di limite di una funzione in un punto*

Risposta: Siano A un insieme di numeri reali, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di aderenza di A. Diciamo che il numero reale L è il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0, e scriviamo

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in A \text{ tale che } |x - x_0| < \delta.$$

Domanda 38. *Definizione di funzione continua in un punto*

Risposta: Siano A un insieme di numeri reali, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un elemento (un punto) di A. Diciamo che la funzione f è continua in x_0 se

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0)\,.$$

Domanda 39. *Definizione di funzione continua su un intervallo*

Risposta: Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo ($I = [a,b],\ [a,b),\ (a,b]$ oppure $= (a,b)$). Diciamo che la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è continua su I, se lo è in ogni punto $x_0 \in I$.

Domanda 40. *Definizione di una funzione derivabile in un punto*

Risposta: Sia (a,b) un inervallo aperto di $\mathbb{R}$ e sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione.
Diciamo che f è derivabile nel punto $x_0 \in (a,b)$, se esiste (ed è finito) il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Per definizione, la derivata di f in x è

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Domanda 41. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in (a, b)$. Dimostrare che f è continua in x_0.*

Risposta: Siccome f è derivabile in x_0, esiste (ed è finito) il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\
&= \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)\left(\lim_{x \to x_0}(x - x_0)\right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

il che implica la continuità di f in x_0.

Domanda 42. *Dimostrazione del fatto che la funzione $f(x) = x$ è derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Risposta: Calcoliamo il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Di conseguenza, f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 1$.

Domanda 43. *Dimostrazione del fatto che la funzione $f(x) = x^2$ è derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Risposta: Calcoliamo il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \big(2x_0 + h\big) = 2x_0.$$

Di conseguenza, f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 2x_0$.

Domanda 44. *Dimostrazione del fatto che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Risposta: Calcoliamo il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x_0}{x_0(x_0 + h)} - \frac{x_0 + h}{x_0(x_0 + h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx_0(x_0 + h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

Domanda 45. *Definizione di estremo superiore di una funzione*

Risposta: Sia f una funzione reale definita sull'insieme $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.
L'estremo superiore di f sull'insieme A è dato da:

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup\big\{f(x) \ : \ x \in A\big\}$$

Domanda 46. *Definizione di estremo inferiore di una funzione*

Risposta: Sia f una funzione reale definita sull'insieme $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.
L'estremo inferiore di f sull'insieme A è dato da:

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf \big\{ f(x) \ : \ x \in A \big\}$$

Domanda 47. *Definizione di massimo di una funzione*

Risposta: Sia f una funzione reale definita sull'insieme $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.
Diciamo che f ammette un massmo su A se e solo se l'insieme

$$\big\{ f(x) \ : \ x \in A \big\}$$

ammette un massimo:

$$\max_A f = \max_{x \in A} f(x) = \max \big\{ f(x) \ : \ x \in A \big\}.$$

In altre parole, f ammette un massimo su A, se esiste un numero reale $x_0 \in A$ tale che

$$f(x_0) = \sup_A f.$$

In questo caso diciamo che il massimo di f su A è raggiunto nel punto x_0.

Domanda 48. *Definizione di minimo di una funzione*

Risposta: Sia f una funzione reale definita sull'insieme $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.
Diciamo che f ammette un minimo su A se e solo se l'insieme

$$\big\{ f(x) \ : \ x \in A \big\}$$

ammette un minimo. Scriviamo

$$\min_A f = \min_{x \in A} f(x) = \min \big\{ f(x) \ : \ x \in A \big\}.$$

In altre parole, f ammette un minimo su A, se esiste un numero reale $x_0 \in A$ tale che

$$f(x_0) = \inf_A f.$$

In questo caso diciamo che il minimo di f su A è raggiunto nel punto x_0.

Domanda 49. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile sull'intervallo aperto (a,b). Supponaimo che f ammette un minimo su (a,b) e supponiamo che tale minimo sia raggiunto nel punto $x_0 \in (a,b)$,*

$$f(x_0) = \min_{x \in (a,b)} f(x).$$

Dimostrare che $f'(x_0) = 0$.

Risposta: Siccome f è derivabile in x_0, abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

In particolare, abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{e} \qquad f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ .$$

Siccome $f(x_0+h) \geq f(x_0)$, abbiamo che $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ per ogni $h > 0$. Quindi

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Siccome $f(x_0+h) \geq f(x_0)$, abbiamo che $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ per ogni $h < 0$. Quindi

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Di conseguenza, $f'(x_0) = 0$.

Domanda 50. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile sull'intervallo aperto (a,b). Supponaimo che f ammette un massimo su (a,b) e supponiamo che tale massimo sia raggiunto nel punto $x_0 \in (a,b)$,*

$$f(x_0) = \max_{x \in (a,b)} f(x).$$

Dimostrare che $f'(x_0) = 0$.

Risposta: Siccome f è derivabile in x_0, abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

In particolare, abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{e} \qquad f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Siccome $f(x_0+h) \leq f(x_0)$, abbiamo che $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ per ogni $h > 0$. Quindi

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Siccome $f(x_0+h) \leq f(x_0)$, abbiamo che $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ per ogni $h < 0$. Quindi

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Di conseguenza, $f'(x_0) = 0$.

Serie

Domanda 51. *Definizione di serie convergente*

Risposta: Diciamo che la serie (di numeri reali) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge

se esiste (ed è finito) il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ delle somme parziali $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Domanda 52. *Definizione di serie divergente*

Risposta: Diciamo che la serie (di numeri reali) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge

se la successione $(S_n)_{n\geq 1}$ delle somme parziali $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ tende a più infinito: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Domanda 53. *Esempio di una serie convergente*

Possibile risposta: Sia $X \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $|X| < 1$. Allora, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} X^k$ converge e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} X^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{1}{1-X}.$$

Dimostrazione: Usando la formula

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{1-X^{n+1}}{1-X},$$

abbiamo che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} X^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} X^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-X^{n+1}}{1-X} = \frac{1}{1-X}.$$

Domanda 54. *Dare un esempio di una serie divergente* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Possibile risposta: La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 1$ diverge.

Dimostrazione: Calcoliamo la somma parziale

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Domanda 55. *Dare un esempio di una serie divergente* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *tale che* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Possibile risposta: La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ diverge.

Dimostrazione: Calcoliamo la somma parziale

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sum_{k=1}^{n} \big(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\,\big) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Cambiando variabile nella prima somma, otteniamo che

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - 1.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \big(\sqrt{n+1}-1\big) = +\infty.$$

Domanda 56. *Supponiamo che* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *sia una serie convergente. Dimostrare che* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Risposta: Consideriamo la successione $(S_n)_{n\geq 1}$ delle somme parziali

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \, .$$

Per definizione (di serie convergente), la successione S_n ha un limite finito $S \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

Ora, per ogni $n \geq 2$, calcoliamo,

$$a_n = \big(a_n + S_{n-1}\big) - S_{n-1} = \left(a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - S_{n-1} = S_n - S_{n-1}.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \big(S_n - S_{n-1}\big) = \lim_{n\to+\infty} S_n \; - \; \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Integrale di Riemann

Domanda 57. *Definizione di una funzione integrabile secondo Riemann*

Risposta: Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.

1. **Definizione di partizione.** Una partizione di $[a, b]$ è un insieme finito di punti

   $$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \in [a, b],$$

   tale che:

   $$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

   Quando si tratta di una partizione, spesso si può usare la scrittura più sintetica

   $$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

2. **Somma superiore e somma inferiore.** Sia $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ una partizione data. Consideriamo la somma superiore $S(\mathcal{P})$ e la somma inferiore $s(\mathcal{P})$ definite come:

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \quad ,$$

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \quad ,$$

dove

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = \sup\big\{f(x) \ : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\big\},$$

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f = \inf\big\{f(x) \ : \ x \in [x_{k-1}, x_k]\big\}.$$

3. **Raffinamenti.** Si dice che una partizione $\mathcal{Q}$ è più fine della partizione $\mathcal{P}$, se si ha che $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Si dimostra la proposizione seguente:

   Proposizione 1. Se $\mathcal{Q}$ è una partizione più fine di $\mathcal{P}$, allora

$$s(\mathcal{P}) \leq s(\mathcal{Q}) \qquad \text{e} \qquad S(\mathcal{Q}) \leq S(\mathcal{P}).$$

4. **Integrale superiore e integrale inferiore di Riemann.** Definiamo:

   - l'integrale superiore di Riemann:

$$S = \inf\big\{S(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{è una partizione di} \ [a,b]\,\big\};$$

   - l'integrale inferiore di Riemann:

$$s = \sup\big\{s(\mathcal{P}) \ : \ \mathcal{P} \ \text{è una partizione di} \ [a,b]\,\big\}.$$

   Come conseguenza della Proposizione del punto precedente abbiamo:

   Proposizione 2. $s \leq S$. In particolare, vale la catena di disuguaglianze

$$s(\mathcal{P}) \leq s \leq S \leq S(\mathcal{P}) \quad \text{per ogni partizione} \quad \mathcal{P}.$$

5. **Definizione di integrale di Riemann.** Diciamo che la funzione f è integrabile secondo Riemann, se $s = S$. L'integrale di f su $[a,b]$ è definito come

$$\int_a^b f(x)\,dx = s = S.$$
