Composizione di funzioni

Siano A e B due insiemi di numeri reali e siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $F : B \to \mathbb{R}$ due funzioni.

Se f è una funzione a valori in B, cioé se

$$f(x) \in B \quad \text{per ogni} \quad x \in A \quad (\text{scriviamo anche} \;\; f(A) \subset B),$$

allora possiamo definire la funzione composta $F \circ f : A \to \mathbb{R}$ come

$$(F \circ f)(x) = F(f(x)) \quad \text{per ogni} \quad x \in A.$$

Esempio 1. *La funzione* $\cos(x^2 + 1)$ *è la composizione delle funzioni* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(X) = \cos X \qquad e \qquad f(x) = x^2 + 1.$$

Quando la seconda funzione F è definita su $\mathbb{R}$ (cioé quando $B = \mathbb{R}$), la composizione $F \circ f$ è sempre ben definita (questo perché la condizione $f(A) \subset B$ è verificata). Altrimenti, se $B \neq \mathbb{R}$, può succedere che la condizione non sia verificata. Per esempio, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ sono le funzioni

$$f(x) = x^2 - 2 \qquad \text{e} \qquad F(X) = \frac{1}{X+1},$$

la composizione $F \circ f$ non può essere definita su tutto l'insieme $A = \mathbb{R}$. Infatti, $f(1) = -1 \notin \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e quindi l'espressione $F(f(1))$ non è definita (in quanto $F(-1)$ non è definita).

Esempio 2. *La funzione* $\cos(x^2 + 1)$ *è la composizione delle funzioni* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(X) = \cos X \qquad e \qquad f(x) = x^2 + 1.$$

Composizioni di funzioni elementari e domini di definizione

Consideriamo le funzioni elementari seguenti:

- le costanti;
- $f(x) = x$ definita su $\mathbb{R}$;
- e^x, $\cos x$, $\sin x$ definite su $\mathbb{R}$;
- $f(x) = \frac{1}{x}$ definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $f(x) = x^{1/n}$ definita su $[0, +\infty)$, dove $n \geq 2$ è un numero naturale fissato;
- $\ln x$ definita su $(0, +\infty)$.

Sia F una funzione ottenuta in seguito di una serie di somme, prodotti e composizioni delle funzioni elencati sopra. Il dominio di definizione di F è il più grande insieme $A \subset \mathbb{R}$ per cui F è ben definita.

Esempio 3. *Il dominio di definizione della funzione* $f(x) = \dfrac{\cos(x+7)}{x^2 - 3x + 2}$ *è l'insieme*

$$Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

Esercizio 4. *Trovare il dominio di definizione delle funzioni seguenti:*

(1) $\sqrt{x^2-5x+6}$;

(2) $\sqrt{x^2+x-6}$;

(3) $\left(x^2+2x-8\right)^{1/3}$;

(4) $\left(x^2-x-2\right)^{2/3}$;

(5) $\left(x^2-2x+6\right)^{1/5}$;

(6) $\dfrac{1}{x^2+5x+6}$;

(7) $\dfrac{x+15}{x^3+3x^2+2}$;

(8) $\dfrac{2x+\cos x}{\sqrt{x^3+2x^2}}$;

(9) $\dfrac{x+\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$;

(10) $\dfrac{\left(4-\frac{1}{x+1}\right)\cos x}{\sqrt{\cos x}}$;

(11) $\dfrac{2\sqrt{x+1}+\cos\frac{1}{x+2}}{\sqrt{e^x+3}}$;

(12) $\dfrac{2\sqrt{x+3}+\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$;

Limiti e derivate

Lemma 5. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $F : B \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(A) \subset B$. Supponiamo che:*

- *x_0 è un punto di aderenza per A;*
- *il limite $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste ed è finito;*
- *ℓ è un punto di aderenza per B;*
- *il limite $L = \lim_{X\to\ell} F(X)$ esiste.*

Allora, $\lim_{x\to x_0} F(f(x)) = L$.

Teorema 6 (La composizione di funzioni continue è continua)**.** *Siano*

$$f : (a,b) \to (c,d) \qquad e \qquad F : (c,d) \to \mathbb{R}$$

due funzioni continue. Allora la funzione $F \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è continua su (a,b).

Lemma 7 (La composizione di funzioni derivabili è derivabile)**.** *Siano*

$$f : (a,b) \to (c,d) \qquad e \qquad F : (c,d) \to \mathbb{R},$$

due funzioni e siano $x_0 \in (a,b)$ e $y_0 \in (c,d)$ tali che:

- *f è derivabile in x_0;*
- *F è derivabile in y_0;*
- *$f(x_0) = y_0$.*

Allora la funzione $F \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e

$$(F \circ f)'(x_0) = f'(x_0)F'(y_0).$$

Teorema 8 (La composizione di funzioni derivabili è derivabile)**.** *Siano*

- *$f : (a,b) \to (c,d)$ una funzione derivabile su (a,b);*
- *$F : (c,d) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su (c,d).*

Allora la funzione $F \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile su (a,b) e

$$(F \circ f)'(x) = f'(x)F'(f(x)) \quad \textit{per ogni} \quad x \in (a,b).$$

Esercizio 9. *Derivare le funzioni seguenti*

$(3x+5)' =$ $\qquad$ $(3x^2 - 4x + 5)' =$ $\qquad$ $(x^n - nx)' =$

$\left(\dfrac{1}{3x+2}\right)' =$

$\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' =$

$\left(\dfrac{x-2}{2x+3}\right)' =$

$\left(\dfrac{1-x}{x+3}\right)' =$

$\left(\dfrac{x}{x^2+3x+1}\right)' =$

Esercizio 10. *Derivare le funzioni seguenti*

$\left(\sqrt{3x+4}\right)' =$ $\qquad$ $\left(\sqrt{x^2-4x}\right)' =$

$\left(\sqrt{x^2-4x}\right)' =$ $\qquad$ $\left(\sqrt{x^n+1}\right)' =$

$\left((x^2-x)^{1/3}\right)' =$ $\qquad$ $\left((2x+1)^{1/7}\right)' =$

$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' =$ $\qquad$ $\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)^3\right)' =$

$\left(\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)' =$

$\left(\sqrt{x+\sqrt{3x}}\right)' =$

$\left(\sqrt{3x+\sqrt{2+x^2}}\right)' =$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) =$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) =$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) =$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x+y}\right) =$

Esercizio 11. *Derivare le funzioni seguenti*

$(x \sin x)' =$

$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' =$ $\qquad\qquad$ $\left(\frac{1}{\sin x}\right)' =$

$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$

$(x \tan x)' =$

$\left(\sqrt{1 + \cos x}\right)' =$

$\left(\frac{1}{1 + \cos^2 x}\right)' =$

$(\sin(3x))' =$ $\qquad\qquad$ $(\cos(6x))' =$

$(\sin(3x) + 2\cos(3x))' =$

$(\cos(2x) - \sin(2x))' =$

$(\sin(2x))'' =$

$(\cos(3x))'' =$

$(\cos(x^n))' =$ $\qquad\qquad$ $\left(\sin\sqrt{x}\right)' =$

$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\cos(xy)\right] =$

Esercizio 12. *Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è soluzione dell'equazione differenziale, dove:*

(1) $f(x) = \cos(ax)$ $\qquad$ $f''(x) + 4f(x) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = \sin(ax)$ $\qquad$ $f''(x) + 9f(x) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$;

(3) $f(x) = 2\sin(ax) + 3\cos(ax)$ $\qquad$ $f''(x) + f(x) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 13. *Derivare le funzioni seguenti*

$\left(\dfrac{1}{e^x+3}\right)' =$ $\qquad\qquad$ $\left(\sqrt{e^x+1}\right)' =$

$\left(e^{3x}\right)' =$ $\qquad\qquad$ $\left(e^{-7x}\right)' =$

$\left(e^{x^2}\right)' =$ $\qquad\qquad$ $\left(e^{\sqrt{x}}\right)' =$

$\left(e^{\cos x}\right)' =$ $\qquad\qquad$ $\left(e^{\sin x}\right)' =$

$\left(\dfrac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\right)' =$

$\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}+1}\right)' =$

$\left(e^x \sin(x)\right)' =$

$\left(e^{2x}\cos(3x)\right)' =$

$\left((x^2+x+1)e^x\right)' =$

Esercizio 14. *Determinare i valori dei parametri $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è soluzione dell'equazione differenziale, dove:*

1. $f(x) = e^{ax}$ $\qquad$ $f''(x) - 4f(x) = 0$;
2. $f(x) = e^{ax}$ $\qquad$ $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$;
3. $f(x) = e^{ax}$ $\qquad$ $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$;
4. $f(x) = xe^{ax}$ $\qquad$ $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$;
5. $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$ $\qquad$ $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$;
6. $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ $\qquad$ $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$.