Composizione di funzioni differenziabili

Teorema 1. *Siano* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *una funzione differenziabile nel punto* $t_0 \in \mathbb{R}$ *e* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione differenziabile in* $\gamma(t_0)$. *Allora la funzione composta* $u \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è differenziabile (derivabile) in* t_0 *e*

$$(u \circ \gamma)'(t_0) = \gamma'(t_0) \cdot \nabla u\big(\gamma(t_0)\big).$$

Dispostrazione: Supponiamo per semplicità che $n = 2$ e scriviamo

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad \text{e} \qquad \gamma(t) = \big(x_0, y_0\big).$$

Siccome, u è differenziabile in (x_0, y_0) abbiamo che la funzione

$$\varepsilon(H,K) := u(x_0 + H, y_0 + K) - \Big[u(x_0,y_0) + H\,\partial_x u(x_0,y_0) + K\,\partial_y u(x_0,y_0)\Big]$$

sia tale che

$$\lim_{(H,K)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(H,K)}{\sqrt{H^2+K^2}} = 0.$$

Ora, usando questa identità, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big[u\big(x(t_0+h), y(t_0+h)\big) - u\big(x(t_0), y(t_0)\big)\Big] &= \frac{1}{h}\Big[u\Big(\big(x(t_0+h) - x_0\big) + x_0\,,\ \big(y(t_0+h) - y_0\big) + y_0\Big) - u\big(x_0,y_0\big)\Big]\\
&= \frac{1}{h}\big(x(t_0+h) - x(t_0)\big)\,\partial_x u(x_0,y_0)\\
&\quad + \frac{1}{h}\big(y(t_0+h) - y(t_0)\big)\,\partial_y u(x_0,y_0)\\
&\qquad + \frac{1}{h}\varepsilon\Big(x(t_0+h) - x(t_0)\,,\ y(t_0+h) - y(t_0)\Big).
\end{aligned}$$

Siccome x e y sono differenzibili in t_0, abbiamo che

$$\lim_{h\to0} \frac{1}{h}\big(x(t_0+h) - x(t_0)\big)\,\partial_x u(x_0,y_0) = x'(t_0)\,\partial_x u(x_0,y_0)\,,$$

$$\lim_{h\to0} \frac{1}{h}\big(y(t_0+h) - y(t_0)\big)\,\partial_y u(x_0,y_0) = y'(t_0)\,\partial_y u(x_0,y_0)\,.$$

Quindi, dobbiamo solo dimostrare che

$$\lim_{h\to0} \frac{1}{h}\varepsilon\Big(x(t_0+h) - x(t_0)\,,\ y(t_0+h) - y(t_0)\Big) = 0.$$

Prima, osserviamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to0} \frac{1}{h}\varepsilon\Big(x(t_0+h) - x(t_0)\,,\ y(t_0+h) - y(t_0)\Big)\\
&\quad = \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\sqrt{\big(x(t_0+h) - x(t_0)\big)^2 + \big(y(t_0+h) - y(t_0)\big)^2}\ \frac{\varepsilon\Big(x(t_0+h) - x(t_0)\,,\ y(t_0+h) - y(t_0)\Big)}{\sqrt{\big(x(t_0+h) - x(t_0)\big)^2 + \big(y(t_0+h) - y(t_0)\big)^2}}.
\end{aligned}$$

La differenziabilità di x e di y implica che

$$\lim_{h\to0} \frac{1}{h}\sqrt{\big(x(t_0+h) - x(t_0)\big)^2 + \big(y(t_0+h) - y(t_0)\big)^2} = \sqrt{\big(x'(t_0)\big)^2 + \big(y'(t_0)\big)^2} \tag{1}$$

Ora siccome le funzioni x e y sono anche continue, abbiamo che

$$\lim_{h\to0}\Big(x(t_0+h) - x(t_0)\Big) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to0}\Big(y(t_0+h) - y(t_0)\Big) = 0.$$

Di conseguenza,

$$\lim_{h\to0} \frac{\varepsilon\Big(x(t_0+h) - x(t_0)\,,\ y(t_0+h) - y(t_0)\Big)}{\sqrt{\big(x(t_0+h) - x(t_0)\big)^2 + \big(y(t_0+h) - y(t_0)\big)^2}} = 0, \tag{2}$$

Mettendo insieme (1) e (2) otteniamo

$$\lim_{h\to0} \frac{1}{h}\varepsilon\Big(x(t_0+h) - x(t_0)\,,\ y(t_0+h) - y(t_0)\Big) = 0. \qquad \square$$

Esercizi

Esercizio 2. *Siano*

$$\gamma(t) = \Big(t + \cos t \sin(t^2)\,,\ t^2 + e^t - 1\Big),$$

e

$$F(x,y) = \cos x \sin y + \sin(xy^2).$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 3. *Siano*

$$\gamma(t) = \Big(t + (\ln t)^2, t^3\Big),$$

e

$$F(x,y) = \ln\big(xy + \sin(x-y)\big).$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=1} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 4. *Siano*

$$\gamma(t) = \Big(\ \cos(t+t^2)\,,\ \sin\big(t^2\big)\ \Big),$$

e

$$F(x,y) = x^2 e^y.$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 5. *Siano*

$$\gamma(t) = \Big(\ \cos(t^2)\,,\ \sin\big(t+t^2\big)\ \Big),$$

e

$$F(x,y) = ye^x.$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 6. *Siano*

$$\gamma(t) = \Big(t + t^2\,,\ t + \sin^3 t\Big),$$

e

$$F(x,y) = x\cos(3y) + y\cos(2x).$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 7. *Siano*

$$\gamma(t) = \Big(e^t - \cos t\,,\ \sin(t+t^2)\Big),$$

e

$$F(x,y) = x + \sin(2y) + \sin(xy) + \sin(x^3y^3) + \sin(x^5y^5).$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Esercizio 8. *Siano*

$$\gamma(t) = \Big(t\cos t\,,\ \cos t\Big),$$

e

$$F(x,y) = \ln y + x\sin(xy)\ln y.$$

Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$