Il numero di Eulero

Proposizione 1 (Definizione con le serie). *Si consideri la successione*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \textit{per ogni} \qquad n \geq 1.$$

(i) Dimostrare che S_n è monotona crescente.

(ii) Dimostrare che $n! \geq \frac{1}{2}2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(iii) Dimostrare che S_n è limitata e che si ha la stima

$$S_n \leq 2\sum_{k=0}^{n} 2^n \leq 4.$$

(iv) Dimostrare che la successione S_n converge.

Proposizione 2. *Dimostrare che se $0 < X < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$1 - nX \leq (1-X)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}X^2.$$

Proposizione 3 (Definizione con le successioni). *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad e \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

(i) Dimostrare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente.

(ii) Dimostrare che la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente.

(iii) Dimostrare che le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono e che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Proposizione 4. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad e \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(i) Usando la formula di Newton

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} X^k,$$

dimostrare che

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \right).$$

(ii) Dimostrare che

$$a_n \leq S_n \qquad \textit{per ogni} \qquad n \geq 1.$$

(iii) Dimostrare che, per ogni $m > n$, si ha

$$a_n \geq \left(1 - \frac{m}{n}\right)^m S_m$$

(iv) Dimostrare che $(a_n)_{n\geq 1}$ converge e che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

$$\boxed{\text{Definiamo} \quad e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.}$$
