Prova scritta - appello di luglio

Esercizio 1. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $\overline{B}_2 \setminus \Big[(0,1) \cup \Big((x,0)\ :\ x \geq 0\Big)\Big]$ *è*

(a) *aperto*
(b) *chiuso*
(c) *compatto*
(d) *stellato rispetto a* $(1,0)$
(e) *stellato rispetto a* $(-1,0)$
(f) *connesso per archi*

Esercizio 2. *Sia* Ω *l'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -1 < x < 1, \quad -|x| < y < |x|.$$

Allora

(a) *I punti* $\big(1/2, 1/2\big)$, $\big(0,0\big)$ *e* $\big(1,-1\big)$ *non stanno in* $\overline{\Omega}$*, ma stanno sul bordo* $\partial\Omega$
(b) *I punti* $\big(1/2, 1/2\big)$, $\big(0,0\big)$ *e* $\big(1,-1\big)$ *sono punti di* $\overline{\Omega}$*, ma non stanno su* $\partial\Omega$
(c) *I punti* $\big(1/2, 1/2\big)$, $\big(0,0\big)$ *e* $\big(1,-1\big)$ *non stanno ne in* $\overline{\Omega}$ *ne su* $\partial\Omega$
(d) Ω *è un aperto connesso*
(e) Ω *è un aperto, ma non è connesso*
(f) $\overline{\Omega}$ *è un compatto connesso per archi*
(g) $\overline{\Omega}$ *è un compatto, ma non è connesso per archi*

Esercizio 3 (2 p.)**.** *Dato un sottoinsieme* Ω *di* $\mathbb{R}^d$*, ricordiamo che :*

- $\overline{\Omega}$ *la chiusura di* Ω*,*
- $\mathrm{int}(\Omega)$ *la parte interna di* Ω*,*
- $\partial\Omega$ *il bordo di* Ω*.*

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere ?

(a) $\mathrm{int}(\Omega \cup B_1) = \mathrm{int}(\Omega) \cup \mathrm{int}(B_1)$
(b) $\partial(\Omega \cup B_1) = \partial\Omega \cup \partial B_1$
(c) $\overline{\Omega \cup B_1} = \overline{\Omega} \cup \overline{B}_1$
(d) $\mathrm{int}(\Omega \cap B_1) = \mathrm{int}(\Omega) \cap \mathrm{int}(B_1)$
(e) $\partial(\Omega \cap B_1) = \partial\Omega \cap \partial B_1$
(f) $\overline{\Omega \cap B_1} = \overline{\Omega} \cap \overline{B}_1$

Esercizio 4 (2 p.)**.** *Dato un sottoinsieme* Ω *di* $\mathbb{R}^d$*, ricordiamo che :*

- $\overline{\Omega}$ *la chiusura di* Ω*,*
- $\mathrm{int}(\Omega)$ *la parte interna di* Ω*,*
- $\partial\Omega$ *il bordo di* Ω*.*

Dati due sottoinsiemi Ω_1 *e* Ω_2 *di* $\mathbb{R}^d$ *indicare quali fra le affermazioni seguenti sono sicuramente vere.*

(a) $\mathrm{int}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mathrm{int}(\Omega_1) \cup \mathrm{int}(\Omega_2)$
(b) $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$
(c) $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$
(d) $\mathrm{int}(\Omega_1 \setminus \Omega_2) = \mathrm{int}(\Omega_1) \setminus \mathrm{int}(\Omega_2)$
(e) $\partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2) = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega_2$
(f) $\overline{\Omega_1 \setminus \Omega_2} = \overline{\Omega}_1 \setminus \overline{\Omega}_2$

Esercizio 5. *Sia* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *la curva*

$$\gamma(t) = \Big(t + t^2 + \sin(t + t^2)\,,\ e^{2t-3t^2}\Big),$$

e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$F(x, y) = -y + xy + x^2y^2.$$

Calcolare la derivata della funzione composta

$$(F \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

(a) $(F \circ \gamma)'(0) = 1$
(b) $(F \circ \gamma)'(0) = -1$
(c) $(F \circ \gamma)'(0) = 0$
(d) $(F \circ \gamma)'(0) = 2$
(e) $(F \circ \gamma)'(0) = -2$
(f) $(F \circ \gamma)'(0) = 4$
(g) $(F \circ \gamma)'(0) = -4$

Esercizio 6. *Sia* F *la funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2y + x$$

e sia Ω *l'insieme*

$$\Omega = \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0\Big).$$

Allora:

(a) *la funzione* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *ha un minimo locale in* $(0, 0)$
(b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$*, ma la matrice Hessiana* D^2F *non è definita positiva in zero.*
(c) *la matrice Hessiana* D^2F *è definita positiva in zero, ma* $\nabla F(0, 0) \neq (0, 0)$*.*
(d) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$ *e la matrice Hessiana* D^2F *è definita positiva in zero.*
(e) *la funzione* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *ha un minimo locale in* $(1, 1)$
(f) $\nabla F(1, 1) = (0, 0)$*, ma la matrice Hessiana* D^2F *non è definita positiva in* $(1, 1)$*.*
(g) *la matrice Hessiana* D^2F *è definita positiva in* $(1, 1)$*, ma* $\nabla F(1, 1) \neq (0, 0)$*.*
(h) $\nabla F(1, 1) = (0, 0)$ *e la matrice Hessiana* D^2F *è definita positiva in* $(1, 1)$*.*

Esercizio 7 (2 p.)**.** *Siano* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *le funzioni*

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \textit{se} \ \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad \textit{se} \ \ (x, y) = (0, 0) \end{cases} \qquad G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \textit{se} \ \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad \textit{se} \ \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

(a) G *è derivabile in zero, ma* F *non lo è.*
(b) F *è derivabile in zero, ma* G *non lo è.*
(c) Nessuna delle due funzioni è derivabile in zero.
(d) G *è differenziabile in zero, ma* F *non lo è.*
(e) F *è differenziabile in zero, ma* G *non lo è.*
(f) Nessuna delle due funzioni è differenziabile in zero.
(g) G *è continua in zero, ma* F *non lo è.*
(h) F *è continua in zero, ma* G *non lo è.*
(i) Nessuna delle due funzioni è continua in zero.

Esercizio 8. *Sia* a *un parametro reale e sia* F *la funzione*

$$F(x, y) = -4y - ax^3y + 3x^4 + 2y^4$$

Trovare il valore del parametro a *per il quale* $(1, 1)$ *è un punto critico di* F *(ovvero* $\nabla F(1, 1) = (0, 0)$*).*

Per il valore del parametro a *trovato, determinare il carattere del punto* $(1, 1)$

(a) *Nel punto* $(1, 1)$ *la matrice Hessiana* D^2F *è definita positiva e la funzione* F *ha un minimo locale.*
(b) *Nel punto* $(1, 1)$ *la matrice Hessiana* D^2F *è definita negativa e la funzione* F *ha un minimo locale.*

(c) *Nel punto* $(1, 1)$ *la matrice Hessiana* D^2F *è definita positiva e la funzione* F *ha un massimo locale.*
(d) *Nel punto* $(1, 1)$ *la matrice Hessiana* D^2F *è definita negativa e la funzione* F *ha un massimo locale.*
(e) *Nel punto* $(1, 1)$ *la matrice Hessiana* D^2F *non è ne definita positiva, ne definita negativa.*

Esercizio 9 (2 p.). *Quali delle seguenti forme differenziali sono chiuse.*

(a) $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$

(b) $\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$

(c) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$

(d) $\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$

Esercizio 10 (2 p.). *Quali delle seguenti forme differenziali sono chiuse.*

(a) $\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$

(b) $\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$

(c) $\dfrac{x}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dy$

(d) $\dfrac{-x}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dy$

Esercizio 11 (2 p.). *Quali delle seguenti forme differenziali sono chiuse.*

(a) $\dfrac{y}{3x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{3x^2+y^2}\,dy$

(b) $\dfrac{-y}{3x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{3x^2+y^2}\,dy$

(c) $\dfrac{x}{3x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y}{3x^2+y^2}\,dy$

(d) $\dfrac{-x}{3x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y}{3x^2+y^2}\,dy$

Esercizio 12 (2 p.). *Quali delle affermazioni seguenti sono vere ?*

(a) *Le* 1*-forme differenziali* α *che si possono scrivere come*

$$\alpha = f(x)\,dx + f(y)\,dy \qquad (\textit{dove } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ è una qualsiasi funzione di classe } C^1)$$

sono chiuse, ma non sono esatte.

(b) *Le* 1*-forme differenziali* α *che si possono scrivere come*

$$\alpha = f(x)\,dx + f(y)\,dy \qquad (\textit{dove } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ è una qualsiasi funzione di classe } C^1)$$

sono esatte, ma non sono chiuse.

(c) *Le* 1*-forme differenziali* α *che si possono scrivere come*

$$\alpha = f(x)\,dx + f(y)\,dy \qquad (\textit{dove } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ è una qualsiasi funzione di classe } C^1)$$

sono sia chiuse che esatte.

(d) *Le* 1*-forme differenziali* α *che si possono scrivere come*

$$\alpha = f(x)\,dx + f(y)\,dy \qquad (\textit{dove } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ è una qualsiasi funzione di classe } C^1)$$

sono esatte, ma solo se definite su un dominio semplicemente connesso.

(e) *La 1-forma*
$$xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$$
è chiusa.

(f) *La 1-forma*
$$2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$$
è chiusa.

(g) *La 1-forma*
$$3xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$$
è chiusa.

Esercizio 13 (2 p.). *Sia* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus K$, *dove* K *è l'insieme*
$$K = \Big((x,1)\ :\ x \geq 1\Big) \cup \Big((x,-1)\ :\ x \leq -1\Big).$$
Sia α *la* 1*-forma (di classe* C^1 *su* Ω*)*
$$\alpha = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy\ .$$
Quali delle affermazioni seguenti sono vere ?

(a) *Per qualsiasi scelta delle funzioni* a *e* b*, la funzione*
$$F:\Omega \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \int_0^y b(0,t)\,dt + \int_0^x a(s,y)\,ds$$
è tale che $dF = \alpha$.

(b) *Per qualsiasi scelta delle funzioni* a *e* b*, la funzione*
$$F:\Omega \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \int_0^y a(0,t)\,dt + \int_0^x b(s,y)\,ds$$
è tale che $dF = \alpha$.

(c) *Se le funzioni* a *e* b *sono tali che*
$$\partial_y a(x,y) = \partial_x b(x,y) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \Omega\,,$$
allora la funzione
$$F:\Omega \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \int_0^y b(0,t)\,dt + \int_0^x a(s,y)\,ds$$
è tale che $dF = \alpha$.

(d) *Se le funzioni* a *e* b *sono tali che*
$$\partial_y a(x,y) = \partial_x b(x,y) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y) \in \Omega\,,$$
allora la funzione
$$F:\Omega \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \int_0^y a(0,t)\,dt + \int_0^x b(s,y)\,ds$$
è tale che $dF = \alpha$.

(e) *In* Ω *ogni* 1*-forma è esatta*

(f) *In* Ω *ogni* 1*-forma chiusa è esatta*

(g) *In* Ω *ogni* 1*-forma esatta è chiusa*

(h) *L'insieme* Ω *non è stellato. Di conseguenza, in* Ω *ci sono forme esatte che non sono chiuse.*

(i) *L'insieme* Ω *non è stellato. Di conseguenza, in* Ω *ci sono forme chiuse che non sono esatte.*

Esercizio 14 (2 p.). *Sia* α *la* 1*-forma*
$$\alpha = x\,d(xy) + x^2\,d(y^2)$$
Calcolare $d\alpha$.

(a) $d\alpha = 0$

(b) $d\alpha = (x + 4xy)\,dx \wedge dy$

(c) $d\alpha = (-x + 4xy)\,dx \wedge dy$

(d) $d\alpha = (x + x^2y^2)\,dx \wedge dy$

(e) $d\alpha = (-x + x^2y^2)\,dx \wedge dy$

(f) $d\alpha = x\,dx + 4xy\,dy$

(g) $d\alpha = -x\,dx + 4xy\,dy$

(h) $d\alpha = x\,dx + x^2y^2\,dy$
(i) $d\alpha = -x\,dx + x^2y^2\,dy$

Esercizio 15 (2 p.). *Sia* B_1 *la palla di centro zero e raggio* 1 *in* $\mathbb{R}^2$. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^3}\,,\ \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy.$$

(a) $I = \pi$
(b) $I = 2\pi$
(c) $I = 3\pi$
(d) $I = -\pi$
(e) $I = -2\pi$
(f) $I = -3\pi$
(g) $I = \frac{\pi}{2}$
(h) $I = -\frac{\pi}{2}$
(i) $I = 0$

Esercizio 16. *Sia* D *il dominio*

$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 \le x \le 1,\ 2x^3 \le y \le 3x^2 \Big\}$$

e sia γ *una curva semplice chiusa* C^1 *a tratti che parametrizza il bordo di* D *in senso antiorario. Sia* α *la* 1*-forma*

$$\alpha = (x \sin x - 2y)\,dx + (y - x)\,dy.$$

Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \alpha.$$

(a) $I = \frac{1}{2}$
(b) $I = -\frac{1}{2}$
(c) $I = \frac{1}{3}$
(d) $I = -\frac{1}{3}$
(e) $I = \frac{1}{4}$
(f) $I = -\frac{1}{4}$
(g) $I = \frac{2}{3}$
(h) $I = -\frac{2}{3}$
(i) $I = 0$

Esercizio 17 (3 p.). *Sia* B_1 *la palla di raggio* 1 *e centro zero in* $\mathbb{R}^2$. *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{B_1} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$$

(a) $I = \frac{2\pi}{3}\big(2^{3/2} - 1\big)$

(b) $I = \dfrac{3\pi}{4}\left(2^{3/2} - 1\right)$

(c) $I = \dfrac{\pi}{2}\left(2^{3/2} - 1\right)$

(d) $I = \dfrac{4\pi}{5}\left(2^{3/2} - 1\right)$

(e) $I = \dfrac{2\pi}{3}\left(5^{3/2} - 1\right)$

(f) $I = \dfrac{3\pi}{4}\left(5^{3/2} - 1\right)$

(g) $I = \dfrac{\pi}{2}\left(5^{3/2} - 1\right)$

(h) $I = \dfrac{4\pi}{5}\left(5^{3/2} - 1\right)$