Regola di de l'Hôpital

Teoremi di de l'Hôpital

Lemma 1 (Teorema di Cauchy)**.** *Siano* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue su* $[a, b]$ *e derivabili su* (a, b). *Supponiamo che*

$$g'(x) > 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in (a, b).$$

Allora esiste $c \in (a, b)$ *tale che*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Idea: Applicare il teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) = \big(g(b) - g(a)\big)f(x) - \big(f(b) - f(a)\big)g(x)$$

Teorema 2. *Sia* $[a, b)$ *un intervallo di* $\mathbb{R}$ *e siano* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che:*

- $f(a) = 0$ *e* $g(a) = 0$*;*
- f *e* g *sono continue su* $[a, b)$ *e derivabili su* (a, b)*;*
- $g'(x) > 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$ $\big($*oppure* $g'(x) < 0$ *per ogni* $x \in (a, b)\big)$*;*
- *esiste il limite* $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Allora $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Teorema 3. *Siano* $a \in \mathbb{R}$ *e* (a, b) *un intervallo aperto di* $\mathbb{R}$. *Siano* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che:*

- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$*;*
- f *e* g *sono derivabili su* (a, b)*;*
- $g'(x) > 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$ $\big($*oppure* $g'(x) < 0$ *per ogni* $x \in (a, b)\big)$*;*
- *esiste il limite* $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Allora $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Corollario 4. *Siano* $(a, +\infty)$ *un intervallo aperto di* $\mathbb{R}$ *e* $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che:*

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ $\big($*oppure* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\big)$*;*
- f *e* g *sono derivabili su* $(a, +\infty)$*;*
- $g'(x) > 0$ *per ogni* $x \in (a, +\infty)$ $\big($*oppure* $g'(x) < 0$ *per ogni* $x \in (a, +\infty)\big)$*;*
- *esiste il limite* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Allora $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Esercizi

Esercizio 5. *Calcolare i limiti*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x+\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x-3x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos x}{\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x+ax^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-xe^x}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x^2)-\cos x}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(3x)}{x^2+x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(2x)}{1-\sqrt{1-x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(e^x-1)}{\sqrt{x+1}-1}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x+7} =$$

– –

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^3+1} =$$

– –

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} =$$

– –

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x+3}} =$$

– –

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} =$$

– –

Esercizio 6. *Calcolare i limiti*

$$\lim_{x\to 0} \left(\prod_{k=2}^{9} \frac{\sin(kx)}{\tan((k-1)x)} \right) =$$

– –

$$\lim_{x\to 0} \left(\prod_{k=1}^{12} \frac{\arcsin((k+1)x)}{e^{kx}-1} \right) =$$

– –

$$\lim_{x\to 0} \left(\prod_{k=2}^{100} \frac{\sin((k-1)x)}{\sqrt{kx+1}-1} \right) =$$

– –

$$\lim_{x\to 0} \left(\sum_{k=1}^{8} \frac{\arctan(kx)}{e^{2x}-1} \right) =$$

– –

Esercizio 7. *Calcolare, in funzione del parametro $n \in \mathbb{N}$, li limite*

$$\lim_{x\to 0} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+\sin(kx)}\right)}{\sin(kx)} \right),$$

e calcolare il risultato per $n = 7$.

Esercizio 8. *Trovare i limiti*

$$\lim_{x\to 0} \left(\prod_{k=2}^{9} \frac{\ln(1+kx)\sin x}{x(e^{kx}-x-1)} \right) =$$

– –

$$\lim_{x\to 0} \left(\prod_{k=2}^{8} \frac{\sin((k-1)x)\sin(2x)}{x(e^{kx}-1)} \right) =$$

– –

$$\lim_{x\to 0} \left(\sum_{k=1}^{8} \frac{x\arcsin(kx)}{\sin((k-1)x)(e^{2x}-1)} \right) =$$

– –