Limiti di successioni

Negli esercizi seguenti potete usare i teoremi e le proposizioni che abbiamo dimostrato a lezione. Alcune delle proprietà dei limiti sono riassunti nella tabella riportata qui sotto.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a+b$	ab	$\frac{a}{b}$, se $b \neq 0$	$\frac{b}{a}$, se $a \neq 0$
$a > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
$a > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$a < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$-----$	0	$-----$
0	$-\infty$	$-\infty$	$-----$	0	$-----$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-----$	$-----$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-----$	$-----$
$+\infty$	$-\infty$	$------$	$-\infty$	$-----$	$-----$

Proposizione 1. *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali tali che:*

– *la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, cioè esiste un numero reale positivo $A > 0$ tale che*

$$|a_n| \le A \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}\,;$$

– *la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è tale che*

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty\,.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Proposizione 2 (Due limiti notevoli)**.**

(a) Dimostrare che, per ogni numero naturale $k \ge 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left({}^1\!/\!_n\right)^{1/k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/k}} = \lim_{n\to\infty} n^{-1/k} = 0 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} n^{1/k} = +\infty.$$

(b) Usando il punto precedente, dimostrare che, per ogni numero razionale $q = \frac{p}{k} > 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = 0 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} n^q = +\infty.$$

Proposizione 3. *Siano $q > 0$ un numero razionale e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ge 0.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^q = a^q.$$

Esercizio 4. *Calcolare i limiti seguenti:*

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{n+6}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2n}{n^2+n+1}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{2-3n}{(n+1)^2-(n-2)^2}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{(n+1)^3-n^3}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2+3}{n^4+n+6}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^2+n+3)}{(2n+1)^3}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(n^3+1)}{(2n+1)^4}$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2-2}{(n^2+n-1)^2}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(1-2n^3)}{1+(n+2)^5}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(n^2+2n)}{(n-1)^5}$;

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2+(-1)^n(3n+4)}{(n^2-1)(n^2+1)-(n^2-n)(n^2+n)}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n+1)^2-(n+1)(n-1)^2}{\big((-1)^n+n\big)^2}$;

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{2n+3}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{(8n^3+3)^{1/3}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}+1)^3}{\sqrt{2n^3+3}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n}+1)^3}{\sqrt{2n^4+3}}$.

Proposizione 5. *Sia $X > 1$ un numero reale fissato.*

(a) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} X^n = +\infty \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{X^n} = \lim_{n\to\infty} X^{-n} = \lim_{n\to\infty} ({}^1\!/\!{}_X)^n = 0.$$

(Porre $X = 1+a$ e usare la disuguaglianza tra $(1+a)^n$ e $1+an$.)

(b) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} X^{1/n} = 1 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} X^{-1/n} = 1.$$

(Porre $X = 1+a$ e trovare una disuguagianza tra $(1+a)^{1/n}$ a $1+\frac{a}{n}$)

(c) Dimostrare che se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} X^{a_n} = +\infty \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} X^{-a_n} = 0.$$

Esercizio 6. *Calcolare i seguenti limiti:*

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n-2^n}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+4^n}{3^n+1}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}+4^{-n}}{3^{-n}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}+4^{-n}}{3^{-n}+1}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+2^{-n}}{2^n-1}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n}+1}{\big(3^n+(-2)^{-n}\big)^2}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{X^n+1}{(1+X)^n}$ *dove* $X > 1$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n}+3^{1/n}}{4^{1/n}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\big(2^n+1\big)^{1/n}+4^n}{3^n+1}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/n}+4^{-1/n}}{3^{1/n}+1}$.

Esercizio 7. *Sia $X > 1$ un numero reale. Calcolare i limiti*

$$\lim_{n\to\infty} (X^{-n}+1)^{1/n} \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} (X^n+1)^{1/n}.$$

Esercizio 8. *Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successione di numeri reali tale che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{1/n} = 1.$$

Esercizio 9. *Calcolare i seguenti limiti:*

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^n+1\right)^{1/n}}{\left(3^n+1\right)^{1/n}}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^n+3\right)^{1/n}}{\left(3^n+2\right)^{1/n}}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \left(2^n+3^n\right)^{1/n}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \left(2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n+1}}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^n+1\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\left(3^{n+2}+1\right)^{1/n}}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^n+3\right)^{1/n}}{\left(3^n+2\right)^{1/n}}$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(2^{1/n}+3^{1/n}\right)^n$.

Proposizione 10. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione di numeri reali tale che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A > 1.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^n = +\infty.$$

Proposizione 11 (Teorema: Criterio del rapporto per successioni)**.** *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali positivi. Supponiamo che esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Dimostrare che:

(i) *se* $A > 1$, *allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$;

(ii) *se* $A < 1$, *allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proposizione 12. *Siano* $k \geq 0$ *un numero intero e* $X > 1$ *un numero reale. Dimostrare che:*

(a) $\lim_{n\to\infty} n^k X^n = +\infty$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k X^n} = 0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{X^n}{n^k} = +\infty$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{X^n} = 0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{X^n}{n!} = 0$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$.

Esercizio 13. *Calcolare i seguenti limiti:*

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n+n^2}{n2^{n+1}-n^3}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^3 2^n}{3^{n+1}+1}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2+1}+(n+1)^2}{2^{(n+1)^2}}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)^{2n+1}}{4^{n^2}+n^2 4^n}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{2^n-n}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n!}{7^n+(-2)^n}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!+2^n}{(n+2)!}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+n}{2^n n!}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!+n^2}{4^n(n+2)!}$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2)!}{(n!)^2}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!+(-2)^n}{2n\big((n-1)!+1\big)}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{(n+1)!}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(2+2^n)^n}{n!}$.

Esercizio 14 (Aggiunto domenica 13/10/2019). *Calcolare i seguenti limiti:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n}$ *;*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n+5}$ *;*

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\sqrt{n}$ *;*

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^{+}1}\right)$ *;*

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big((n^2+1)-\sqrt{n^4+n^2+1}\Big)$ *;*

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ *;*

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+1}-n\right)$ *;*

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+6}-(n+2)\right)n$ *;*

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\sqrt{2^n+3n}-\sqrt{2^n+1}\Big)$ *;*

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4^{n+1}+1}-2^n}{2^n+3}$ *;*

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{3^n+2^n}-\sqrt{3^n-2^n}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{2^n-1}$.