Seno, coseno e π

Abbiamo già fatto vedere che le funzioni

$$u(x) = \cos x \quad \text{e} \quad v(x) = \sin x,$$

sono derivabili su $\mathbb{R}$ e sono le uniche due funzioni derivabili tali che

$$\begin{cases} u'(x) = -v(x), \\ v'(x) = u(x), \\ u(0) = 1, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Teorema 1. *Esiste almeno un numero reale $x > 0$ tale che $u(x) = 0$.*

Definizione 2. $\dfrac{\pi}{2} = \min\{x > 0 \ : \ \cos x = 0\}.$

Teorema 3. *Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, valgono le identità*

- $\cos(-x) = \cos(x)$ *e* $\sin(-x) = -\sin x$*;*
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ *e* $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$*;*
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ *e* $\sin(\pi + x) = -\sin x$*;*
- $\cos(2\pi + x) = \cos x$ *e* $\sin(2\pi + x) = \sin x$.

In particolare, $\sin$ *e* $\cos$ *sono funzioni 2π-periodiche su $\mathbb{R}$.*

Corollario 4. *Per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x^2 + y^2 = 1$ esiste un unico $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che $\cos\theta = a$ e $\sin\theta = b$.*

Lunghezza di una curva

Una curva piana è una funzione $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definita su un intervallo $\mathcal{I} = [a, b]$ e tale che le funzioni $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ sono continue. Ricordiamo che una partizione dell'intervallo $[a, b]$ è un insieme finito $\mathcal{P}$ di punti distinti di $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n\}$$

tale che

$$t_0 = a \qquad \text{e} \qquad t_n = b.$$

Per ogni partizione $\mathcal{P}$ definiamo

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

Lemma 5. *Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva definita su $[a, b]$ e siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due partizioni di $[a, b]$. Dimostrare che se $\mathcal{Q}$ è più fine di $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$), allora $L(\mathcal{Q}) \geq L(\mathcal{P})$.*

Definizione 6. *Diciamo che la curva ha lunghezza finita, se l'insieme*

$$\big\{L(\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \ \text{è una partizione di}\ \ [a,b]\big\}$$

è limitato superiormente. Se questo è il caso, la lunghezza della curva è

$$L(\gamma;[a,b]) = \sup\big\{L(\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \ \text{è una partizione di}\ \ [a,b]\big\}.$$

Teorema 7. *Sia $\mathcal{I}$ un intervallo aperto e siano $x:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$ e $y:\mathcal{I}\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili su $\mathcal{I}$ con le due derivate che sono funzioni continue su $\mathcal{I}$. Allora, per ogni intervallo $[a,b]\subset I$, la curva $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, definita su $[a,b]$ è di lunghezza finita e si ha*

$$L(\gamma;[a,b]) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$$

<u>**Dimostrazione:**</u>
Parte 1. Calcolo di $L(\mathcal{P})$. Sia $\mathcal{P}=\{t_0<t_1<\cdots<t_n\}$ una partizione di $[a,b]$. Per il teorema di Lagrange, per ogni $1\le k\le n$, esistono punti z_k e w_k tali che

$$t_{k-1}<z_k<t_k \qquad \text{e} \qquad x'(z_k)=\frac{x(t_k)-x(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}},$$

$$t_{k-1}<w_k<t_k \qquad \text{e} \qquad y'(w_k)=\frac{y(t_k)-y(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}.$$

Ora calcoliamo $L(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big)^2+\big(y(t_k)-y(t_{k-1})\big)^2}\\
&= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(z_k))^2(t_k-t_{k-1})^2+(y'(w_k))^2(t_k-t_{k-1})^2}\\
&= \sum_{k=1}^n (t_k-t_{k-1})\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2}
\end{aligned}$$

Parte 2. Assoluta continuità.

$$\begin{aligned}
&\Big|\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2}-\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(z_k))^2}\,\Big|\\
&\qquad\qquad = \frac{\Big|\Big((x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2\Big)-\Big((x'(z_k))^2+(y'(z_k))^2\Big)\Big|}{\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2}+\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(z_k))^2}}\\
&\qquad\qquad = \frac{\Big|(y'(w_k))^2-(y'(z_k))^2\Big|}{\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(w_k))^2}+\sqrt{(x'(z_k))^2+(y'(z_k))^2}}\\
&\qquad\qquad \le \frac{\Big|(y'(w_k))^2-(y'(z_k))^2\Big|}{\sqrt{(y'(w_k))^2}+\sqrt{(y'(z_k))^2}}\\
&\qquad\qquad = \frac{\big|y'(w_k)+y'(z_k)\big|}{|(y'(w_k)|+|y'(z_k)|}\big|y'(w_k)-y'(z_k)\big| \le \big|y'(w_k)-y'(z_k)\big|.
\end{aligned}$$

Ora, siccome y' è una funzione continua sulll'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, y' è anche assoutamente continua, cioè

per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che:
se $s,t\in[a,b]$ sono tale che $|s-t|\le\delta$, allora $|y'(s)-y'(t)|\le\delta$.

In particolare, se $\mathcal{P}$ è una partizione tale che

$$t_k - t_{k-1} < \delta \qquad \text{per ogni} \qquad k = 1, \dots, n,$$

allora si ha che $|y'(z_k) - y'(w_k)| \le \varepsilon$ per ogni k, e quindi

$$\left| L(\mathcal{P}) - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{(x'(z_k))^2 + (y'(z_k))^2} \right| \le (b-a)\varepsilon.$$

Parte 3. La curva γ ha lunghezza finita. Sia $\mathcal{Q}$ una qualsiasi partizione di (a,b). Sia $P = \{s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m\}$ una partizione di $[a,b]$ più fine di $\mathcal{Q}$ e tale che $s_j - s_{j-1} < \delta$ (dove δ è la costante data dall'assoluta continuità di y'). Si ha quindi che

$$L(\mathcal{Q}) \le L(\mathcal{P}).$$

Ora, consideriamo la funzione (continua)

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

La funzione f è quindi integrabile (secondo Riemann) su $[a,b]$. In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $\mathcal{P}'$ tale che

$$S(\mathcal{P}') - s(\mathcal{P}') \le \varepsilon,$$

dove $S(\mathcal{P}')$ e $s(\mathcal{P}')$ sono la somma superiore e inferiore di Riemann. Prendiamo ora la partizione $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}$ e supponiamo che

$$\mathcal{P}'' = \{t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{P}''$ sia più fine sia di $\mathcal{P}$ che di $\mathcal{P}'$. Quindi

$$L(\mathcal{Q}) \le L(\mathcal{P}) \le L(\mathcal{P}'') \qquad \text{e} \qquad S(\mathcal{P}'') - s(\mathcal{P}'') \le S(\mathcal{P}') - s(\mathcal{P}') \le \varepsilon.$$

Ora, applicando i risultati di Parte 1 e Parte 2 (relativi alla partizione $\mathcal{P}''$), abbiamo che

$$\left| L(\mathcal{P}'') - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(z_k) \right| \le (b-a)\varepsilon.$$

D'altro lato abbiamo che

$$s(\mathcal{P}'') \le \int_a^b f(t)dt \le S(\mathcal{P}''),$$

$$s(\mathcal{P}'') = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \min_{[t_{k-1},t_k]} f \le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(z_k) \le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \max_{[t_{k-1},t_k]} f = S(\mathcal{P}'').$$

Di conseguenza,

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(z_k) \right| \le \varepsilon,$$

e quindi

$$\left| L(\mathcal{P}'') - \int_a^b f(t)dt \right| \le \left| L(\mathcal{P}'') - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(z_k) \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(z_k) - \int_a^b f(t)dt \right| \le (1+b-a)\varepsilon.$$

Questo implica che

$$L(\mathcal{P}'') \le \int_a^b f(t)dt + (1+b-a)\varepsilon.$$

Di conseguenza, anche

$$L(Q) \le \int_a^b f(t)dt + (1+b-a)\varepsilon.$$

Siccome la partizione iniziale Q era arbitraria, si ottine che l'insieme

$$\{L(\mathcal{Q}) \ : \ Q \ \text{ partizione di } \ [a,b]\},$$

è limitata superiormente. Di consequenza, la curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ ha lunghezza finita.
Parte 4. Conclusione. Sia ora $L(\gamma)$ la lunghezza della curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia Q una partizione tale che

$$L(\gamma) - L(\mathcal{Q}) \le \varepsilon.$$

Ripetendo la costruzione di Parte 3, troviamo una partizione $\mathcal{P}''$ tale che

$$0 \le L(\gamma) - L(\mathcal{P}'') \le L(\gamma) - L(\mathcal{Q}) \le \varepsilon,$$

$$\left| L(\mathcal{P}'') - \int_a^b f(t)dt \right| \le (1 + b - a)\varepsilon.$$

Di conseguenza,

$$\left| L(\gamma) - \int_a^b f(t)dt \right| \le |L(\gamma) - L(\mathcal{P}'')| + \left| L(\mathcal{P}'') - \int_a^b f(t)dt \right| \le (2 + b - a)\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitraria, otteniamo

$$L(\gamma) - \int_a^b f(t)dt = 0,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 8 (La lunghezza di un arco di cerchio)**.** *Sia* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$*. Allora,*

$$L(\gamma; [0,\theta]) = \theta \quad \textit{per ogni} \quad \theta > 0.$$

In particolare, $L(\gamma; [0, 2\pi]) = 2\pi$*.*