Integrali definiti. Integrale di Riemann

Funzioni integrabili secondo Riemann. Definizioni

Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Una partizione dell'intervallo $[a,b]$ è un insieme $\mathcal{P}$ finito di punti distinti di $[a,b]$:

$$\mathcal{P}=\{x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n\}$$

tale che

$$x_0=a \qquad \text{e} \qquad x_n=b.$$

Per ogni numero naturale $k\in\{1,\dots,n\}$, consideriamo il sup e l'inf della funzione f su $[x_{k-1},x_k]$.

$$m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Definiamo la somma superiore $S(\mathcal{P})$ e la somma inferiore $s(\mathcal{P})$ di Riemann come

$$S(\mathcal{P})=\sum_{k=1}^n M_k(x_k-x_{k-1}) \qquad \text{e} \qquad s(\mathcal{P})=\sum_{k=1}^n m_k(x_k-x_{k-1}).$$

Naturalmente, si ha che per ogni partizione $\mathcal{P}$, $s(\mathcal{P})\le S(\mathcal{P})$.

Lemma 1. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Sia $\mathcal{P}=\{x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n\}$ una partizione di $[a,b]$ e sia*

$$\mathcal{Q}=\{x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<y<x_k<\cdots<x_n\}$$

la partizione ottenuta da $\mathcal{P}$ aggiungendo un ulteriore punto y; possiamo assumere che per ipotesi, $x_{k-1}<y<x_k$ per un qualche indice $k\in\{1,\dots,n\}$. Allora, valgono le disuguaglianze

$$S(\mathcal{Q})\le S(\mathcal{P}) \qquad \textit{e} \qquad s(\mathcal{Q})\ge s(\mathcal{P}).$$

Come corollario otteniamo la proposizione seguente.

Proposizione 2. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Sia $\mathcal{P}$ una partizione di $[a,b]$ e sia $\mathcal{Q}$ una partizione più fine di $\mathcal{P}$ (ossia, tale che $\mathcal{P}\subset\mathcal{Q}$ come insiemi). Allora*

$$S(\mathcal{Q})\le S(\mathcal{P}) \qquad \textit{e} \qquad s(\mathcal{Q})\ge s(\mathcal{P}).$$

Corollario 3. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due partizioni di $\mathcal{P}$. Allora*

$$s(\mathcal{Q})\le S(\mathcal{P}).$$

Corollario 4. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora, esistono e sono finiti:*

- *l'estremo superiore*
$$s=\sup\big\{s(\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \ \textit{partizione di}\ \ [a,b]\big\};$$
- *l'estremo inferiore*
$$S=\inf\big\{S(\mathcal{P})\ :\ \mathcal{P}\ \ \textit{partizione di}\ \ [a,b]\big\}.$$

Inoltre, si ha che $s\le S$.

Definizione 5. *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato in* $\mathbb{R}$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Se* $s = S$*, allora diciamo che la funzione* f *è integrabile secondo Riemann su* $[a, b]$ *e scriviamo*

$$\int_a^b f(x)\,dx = s = S.$$

Esempio 6 (Una funzione integrabile)**.** *Se* f *è costante su* $[a, b]$*,*

$$f(x) = C \quad \text{per ogni} \quad x \in [a, b],$$

per un qualche $C \in \mathbb{R}$*, allora* f *è integrabile e si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = C(b - a).$$

Infatti,

- *per ogni partizione* $\mathcal{P}$ *di* $[a, b]$
$$s(\mathcal{P}) = C(b - a);$$
- *per ogni partizione* $\mathcal{P}$ *di* $[a, b]$
$$S(\mathcal{P}) = C(b - a);$$
- *di conseguenza,* $s = S = C(b - a)$*,* f *è integrabile su* $[a, b]$ *e vale che* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = C(b - a)$*.*

Esempio 7 (Una funzione che non è integrabile secondo Riemann)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *la funzione definita come:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ è razionale;} \\ 0, & \text{se } x \text{ non è razionale.} \end{cases}$$

Allora,

- *per ogni partizione* $\mathcal{P}$ *di* $[a, b]$
$$s(\mathcal{P}) = 0;$$
- *per ogni partizione* $\mathcal{P}$ *di* $[a, b]$
$$S(\mathcal{P}) = b - a;$$
- *di conseguenza,* $s = 0$ *e* $S = b - a$*. Quindi* f *non è integrabile (secondo Riemann) su* $[a, b]$*.*

Un criterio di integrabilità e le sue conseguenze

Proposizione 8 (Criterio di integrabilità)**.** *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato in* $\mathbb{R}$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Allora,* f *è integrabile su* $[a, b]$ *se e solo se vale la seguente proprietà:*

Per ogni $\varepsilon > 0$*, esiste una partizione* $\mathcal{P}$ *di* $[a, b]$ *tale che* $S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon$*.*

Equivalentemente,

Per ogni $\varepsilon > 0$*, esiste una partizione* $\mathcal{P} = \{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ *di* $[a, b]$ *tale che*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\alpha_k) - f(\beta_k)|(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad \alpha_k, \beta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Teorema 9 (Integrabilità delle funzioni monotone)**.** *Sia* $[a, b]$ *un intervallo chiuso e limitato in* $\mathbb{R}$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione monotona. Allora,* f *è integrabile su* $[a, b]$*.*

Teorema 10. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Sia $c\in(a,b)$. Allora f è integrabile su $[a,b]$ se e solo se f è integrabile sia su $[a,c]$ che su $[c,b]$. Inoltre, si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Teorema 11. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e siano $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni limitate e integrabili su $[a,b]$. Allora, anche le funzioni $f+g$ e fg sono integrabili su $[a,b]$. Inoltre, si ha*

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

e, per ogni costante $C\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

Esercizio 12. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Dimostrare che se f è integarabile su $[a,b]$, allora lo è anche la funzione $|f|:[a,b]\to\mathbb{R}$.*

Esercizio 13 (Difficile)**.** *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successione di numeri reali. Supponiamo che*

$$0\le a_n\le 1 \quad \text{per ogni} \quad n\in\mathbb{N},$$

e che b_n sia limitata. Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la funzione definita come:

$$f(x)=\begin{cases} b_n, & \text{se } x=a_n \text{ per un qualche termine } a_n \text{ della successione};\\ 0, & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

(a) Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dimostrare che la funzione f è integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

(b) Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dimostrare che la funzione f è integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Integrabilità delle funzioni continue

Lemma 14 (Uniforme continuità)**.** *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$. Allora, f è uniformemente continua, ossia vale la proprietà seguente:*

$$\text{Per ogni } \varepsilon>0, \text{ esiste } \delta>0 \text{ tale che}$$
$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \text{ per ogni } x,y\in[a,b] \text{ tale che } |x-y|<\delta.$$

Teorema 15 (Integrabilità delle funzioni continue)**.** *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile su $[a,b]$.*

Esercizio 16 (Difficile)**.** *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile. Per il criterio di integrabilità (Prop. 8), l'integrabilità è equivalente alla proprietà seguente: per ogni $\varepsilon>0$ esiste una partizione $\mathcal{P}$ tale che $S(\mathcal{P})-s(\mathcal{P})<\varepsilon$. Per mostrare l'integrabilità delle funzioni continue (Teorema 16) e le funzioni monotone (Teorema 9) è stato sufficiente considerare solo partizioni $\mathcal{P}_n$ con n intervalli della stessa lunghezza: $\mathcal{P}_n=\{x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n\}$, dove*

$$x_0=a,\ x_n=b,\ x_k=a+k\frac{b-a}{n} \quad \text{per ogni intero} \quad k\in[0,n].$$

Purtroppo, per una funzione integrabile qualsiasi, lavorare solo con questo tipo di partizioni potrebbe non essere sufficiente. Trovare un esempio di una funzione integrabile $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \qquad \text{ma si ha che} \qquad s(\mathcal{P}_n)=0 \ \text{ e } \ S(\mathcal{P}_n)\ge 1 \ \text{ per ogni } \ n\in\mathbb{N}.$$

Un teorema di confronto e due corollari

Teorema 17. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e siano $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni limitate e integrabili su $[a,b]$. Se $f \leq g$ su $[a,b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Corollario 18. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile su $[a,b]$. Allora*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Corollario 19. *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile su $[a,b]$. Se $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$, allora*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Teorema della media e teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 20 (Teorema della media)**.** *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$. Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 21 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$. Allora, la funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

è derivabile su (a,b) e

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in (a,b).$$

Corollario 22. *Sia (A,B) un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $f : (A,B) \to \mathbb{R}$ una funzione continua su (A,B). Se $F : (A,B) \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su (A,B), allora per ogni coppia di punti $a,b \in (A,B)$, $a < b$, si ha che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Esempio di una funzione "molto oscillante", ma integrabile

Proposizione 23 (Un criterio di integrabilità)**.** *Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata su $[a,b]$. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $[a,b]$ tali che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Se f è integrabile su ogni intervallo $[a_n, b_n]$, allora f è integrabile anche su $[a,b]$ e si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx.$$

Corollario 24. *La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita come*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \textit{se} \quad x > 0, \\ 0 & \textit{se} \quad x = 0, \end{cases}$$

è integrabile su $[0,1]$.