La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ e criterio del confronto asintotico

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$

Teorema 1. *Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successioni monotona decrescente di numeri reali strettamente positivi. Allora, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$.*

Teorema 2. *Sia p un numero reale fissato.*
Allora, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$

- *converge, se $p > 1$;*
- *diverge, se $p \leq 1$.*

Esercizio 3. *Sia p un numero reale fissato. Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\big(\log_2 n\big)^p}$$

converge, per $p > 1$, e diverge per $p \leq 1$.

Criterio del confronto asintotico

Teorema 4 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ due succesioni di numeri reali positivi. Supponiamo che il limite*

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

esiste ed è un numero reale positivo ($0 < \ell < +\infty$).
Allora, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Esercizio 5. *Dimostrare Teorema 4.*

Esercizio 6. *Studiare la convergenza delle serie.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}}{n^4+1}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n^{3/2}+\sqrt{n+1}}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n^4+2}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\sqrt{n}\big(n+(-1)^n\big)}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2-n^2}{(2n+1)^3+1}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2+n^2}{n^3+3}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2}n)^5}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos n}{n^2+\sin n}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+\cos(2n+3)}{n^2+3n+1}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n\cos n}{n^3+1}$.