Sommatorie e produttorie

Definizione 1. *Dati, due numeri interi $m \leq n$ ed i numeri reali*

$$a_m,\ a_{m+1},\ a_{m+2},\ \dots\ ,\ a_{n-1},\ a_n,$$

definiamo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + \ a_{n-1} + a_n \qquad e \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \dots \ a_{n-1} \cdot a_n.$$

Esempio 2.

$$\sum_{\mathbf{j}=6}^{9}(2\cdot\mathbf{j}+3) \quad = (2\cdot\mathbf{6}+3)+(2\cdot\mathbf{7}+3)+(2\cdot\mathbf{8}+3)+(2\cdot\mathbf{9}+3) = 15+17+19+21 = 72.$$

Esempio 3.

$$\sum_{\mathbf{k}=-1}^{2}(\mathbf{k}+3) \quad = (-\mathbf{1}+3)+(\mathbf{0}+3)+(\mathbf{1}+3)+(\mathbf{2}+3) = 2+3+4+5 = 14.$$

Esempio 4.

$$\sum_{\mathbf{n}=23}^{23}(\mathbf{n}-8) \quad = (\mathbf{23}-8) = 15.$$

Esempio 5.

$$\prod_{\mathbf{i}=2}^{4}(\mathbf{i}+1) \quad = (\mathbf{2}+1)\cdot(\mathbf{3}+1)\cdot(\mathbf{4}+1) = 3\cdot 4\cdot 5 = 60.$$

Esempio 6.

$$\prod_{\mathbf{j}=2}^{4}\frac{1}{\mathbf{j}-1} = \frac{1}{\mathbf{2}-1}\cdot\frac{1}{\mathbf{3}-1}\cdot\frac{1}{\mathbf{4}-1} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 7. *Calcolare le somme ed i prodotti seguenti*

$$\sum_{k=1}^{3} k =$$

$$\sum_{k=1}^{3}(2k+1) =$$

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{3}(2k+1) =$$

$$\sum_{k=0}^{2} 2^k =$$

$$\prod_{k=1}^{4} k =$$

$$\sum_{k=-2}^{2} k =$$

$$\prod_{k=2}^{4} k =$$

$$\sum_{k=1}^{3} 5 =$$

$$\prod_{k=1}^{5} 2 =$$

Esercizio 8. *Scrivere le somme ed i prodotti utilizzando i simboli di sommatoria* $\sum$ *e produttoria* $\prod$

$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =$

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$

$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 =$

$1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} =$

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} =$

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 =$

$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 =$

Esercizio 9. *Scrivere la somma di tutti i numeri pari da* 2 *a* 100 *come una sommatoria (usando* Σ*).*

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 98 + 100 =$$

Esercizio 10. *Scrivere le somme ed i prodotti seguenti utilizzando i simboli di sommatoria e produttoria.*

Esempio: $a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $\qquad$ $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} a_k$

$a_0 + \sum_{k=1}^{n+2} a_k =$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{3} a_k + \sum_{k=4}^{n} a_k =$

$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k =$ $\qquad$ $a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+2} =$

$\frac{1}{10} \prod_{k=1}^{10} k =$ $\qquad$ $\frac{1}{3} \prod_{k=3}^{7} k =$

$\dfrac{\prod_{k=1}^{10} 2^k}{\prod_{k=1}^{3} 2^k} =$ $\qquad$ $\dfrac{\prod_{k=1}^{10} 3^k}{\prod_{k=7}^{10} 3^k} =$ $\qquad$ $\dfrac{\prod_{k=1}^{2n+1} 3^k}{\prod_{k=1}^{n} 3^k} =$

$\sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{4} 2^k =$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n+2} k =$

$\sum_{k=1}^{n+4} k - \sum_{k=1}^{n-1} k =$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{3n+2} k - \sum_{k=2n}^{3n+2} k =$

Sommatorie e produttorie con termini costanti

Esercizio 11. *Calcolare le somme ed i prodotti seguenti.*

$$\sum_{k=1}^{n} 5 =$$

$$\sum_{k=1}^{n+2} 7 =$$

$$\sum_{k=2}^{n} 6 =$$

$$\sum_{k=0}^{n} 4 =$$

$$\prod_{k=0}^{n+3} 5 =$$

$$\sum_{k=n}^{2n+1} 8 =$$

Esercizio 12. *Calcolare le somme ed i prodotti seguenti.*

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3 =$$

$$\prod_{k=3}^{n+1} 2 =$$

$$\sum_{k=m}^{n} a =$$

$$\prod_{k=3}^{n+1} 2 =$$

$$\prod_{k=n+1}^{3n+5} 7 =$$

$$\sum_{k=n-2}^{2n+2} 8 =$$

Esercizio 13 (Sommatorie, produttorie e numeri complessi)**.** *Scrivere i numeri complessi seguenti in forma algebrica*

$$\prod_{k=1}^{4n+3} i =$$

$$\prod_{k=1}^{8n+5} (1+i) =$$

$$\prod_{k=3}^{200} e^{i\pi/3} =$$

Operazioni con le sommatorie

Siano $n \geq 1$ un numero naturale, e siano $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ e α dei numeri reali o complessi. Allora, valgono le formule seguenti:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n}(\alpha b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Operazioni con le produttorie

Siano $n \geq 1$ un numero naturale, $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ dei numeri complessi (o reali) e sia α un numero naturale. Allora, si ha

$$\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right), \qquad \prod_{k=1}^{n} b_k^{\alpha} = \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\alpha}, \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}, \quad \text{se } \prod_{k=1}^{n} b_k \neq 0.$$

Fattoriale e cambio di variabile

Definizione 14. *Per ogni numero naturale $n \geq 1$, indichiamo con $n!$ (leggesi n-fattoriale) il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a n:*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Inoltre, per definizione, $0! = 1$.

Esempio 15 (Cambio di variabile in una sommatoria/produttoria)**.** *Siano $m \leq n$ due numeri interi. Si consideri il prodotto*

$$\prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Per ogni intero $\ell \in \mathbb{Z}$, consideriamo la nuova variabile $j = k + \ell$. Quindi possiamo riscrivere il prodotto di sopra come segue:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{j=m+\ell}^{n+\ell} a_{j-\ell}.$$

Per esempio, prendendo $j = k + 3$ nel prodotto seguente, si ottiene

$$\prod_{k=1}^{n}(k+3) = \prod_{j=4}^{n+3} j.$$

Ora, moltiplicando e dividendo per il prodotto $1 \cdot 2 \cdot 3$, si ottiene

$$\prod_{k=1}^{n}(k+3) = \prod_{j=4}^{n+3} j = \frac{\left(\prod_{j=1}^{3} j\right)\left(\prod_{j=4}^{n+3} j\right)}{\prod_{j=1}^{3} j} = \frac{\prod_{j=1}^{n+3} j}{\prod_{j=1}^{3} j} = \frac{(n+3)!}{3!} = \frac{(n+3)!}{6}.$$

Esempio 16. *Scrivere l'espressione seguente usando il fattoriale:* $\prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+3)}{2}$.

Soluzione.

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+3)}{2} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k(k+3)}{\prod_{k=1}^{n} 2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k+3)\right)}{\prod_{k=1}^{n} 2}.$$

Ora, calcoliamo separatemente le tre produttorie coinvolte. Intanto, osserviamo che, per definizione, si ha

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!.$$

Inoltre, abbiamo che

$$\prod_{k=1}^{n} 2 = 2^n.$$

e, usando l'esempio precedente,

$$\prod_{k=1}^{n}(k+3) = \frac{(n+3)!}{6}.$$

Mettendo tutto insieme, si ottiene

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+3)}{2} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k+3)\right)}{\prod_{k=1}^{n} 2} = \frac{n!(n+3)!}{6 \cdot 2^n}.$$

Esercizio 17. *Scrivere le espressioni seguenti usando il fattoriale.*

$$\prod_{k=1}^{n+2} k = \qquad\qquad \prod_{k=3}^{n} k =$$

$$\prod_{k=1}^{n} 3k^2 =$$

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{3} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} k(k+1) =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{2} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k-1} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k(k+1)}{k-1} =$$

Esercizio 18. *Scrivere le espressioni seguenti usando il fattoriale.*

$$\prod_{k=2}^{n+1} 5k =$$

$$\prod_{k=1}^{n+2} (k+3) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} (k-1)(k+1) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2-1} =$$

Esercizio 19. *Scrivere le espressioni seguenti usando il fattoriale.*

$$\sum_{k=1}^{n} \log(k+1) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \log\frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \log(2k^3) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \Big(2\,\log k + \log(k+1)\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\log 3 + 3\log k\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(2\log k - \log(k+1)\Big) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \Big(\log\frac{k+1}{3} + \log\frac{2}{k}\Big) =$$

Somme di progressioni geometriche e aritmetiche.

Esercizio 20 (Somma di una progressione geometrica)**.** *Usando la formula*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad \textit{per ogni} \qquad x \neq 1,$$

calcolare le somme seguenti.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k =$ $\qquad\qquad$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2} 7^k =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k =$ $\qquad\qquad$ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 5^k =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^k =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 7^{2k+1} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{2^k} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} 3^{k/2} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 3^k 5^{2-k} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{3k-1} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{3^{k-2}} =$

Esercizio 21. *Calcolare le somme seguenti.*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{1+3k} 3^{-2(k+1)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k 3^{k+2}}{7^{k+1}} =$$

$$\sum_{k=2}^{n+2} (-3)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k}{n}} =$$

Esercizio 22. *Usando la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

calcolare le somme seguenti.

$$\sum_{k=1}^{n} 4k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+5) =$$

$$\sum_{k=0}^{n+2} 3k =$$

$$\sum_{k=2}^{n} (k+4) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-2) =$$

$$\sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{2} =$$

$$\sum_{k=1}^{3n} (2k-1) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-k}{3} =$$

Esercizio 23. *Calcolare le somme seguenti.*

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b) =$$

– –

$$\sum_{k=0}^{n}(3-k) =$$

– –

$$\sum_{k=1}^{2n}3(k+1) =$$

– –

$$\sum_{k=2}^{3n}\frac{2-k}{3} =$$

– –

Esercizio 24. *Usando le formule*

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

calcolare le somme seguenti.

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1) =$$

– –

$$\sum_{k=0}^{n}(k^2+1) =$$

– –

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+2)(3k-2) =$$

– –

$$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)(k+1) =$$

– –

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+1}{k+1} =$$

– –

Binomio di Newton

Esercizio 25. *Utilizzando la formula*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

dove, per ogni coppia di interi $0 \le k \le n$, *il coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$ *è definito come*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,,$$

calcolare le somme seguenti.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1} 5^{n-k} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2n-k} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 3^{-k} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^k}{2^{n-k}} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-n} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^k 3^{n-k} =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k 4^{n-k} =$

Esercizio 26. *Calcolare le somme seguenti.*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{k-n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{2n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^k}{2^{2k}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(3^k\right)^2 =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^k 3^{n+k} =$$

Esercizio 27 (Esercizio ricapitolativo). *Calcolare le sommatorie seguenti.*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-2k}{5} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{k-2}2^{3-k} =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{3^k 2^{n-k}}{5^k} =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k} j\Big) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k} 2^{2n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{2n} (k+2) =$$

$$\sum_{k=2}^{n} 2^{2-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2n+k} 5^{2n-k} =$$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^k 3^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^k 3^{n-k} =$$

Somme telescopiche

Esercizio 28. *Usando l'identità*

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a} = \frac{a}{k(k+a)},$$

calcolare le somme seguenti.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} =$$

Esercizio 29. *Usando l'identità*

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

calcolare le somme seguenti.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} =$$

Esercizio 30. *Calcolare la somma seguente.*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!} =$$