Sviluppo in serie di Taylor

Teorema 1. *Siano* $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in (a,b)$ *e* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che:*

- f *è derivabile* $n-1$ *volte su* (a,b)*;*
- $f^{(n-1)}$ *è derivabile in* x_0*.*

Allora esiste un unico polinomio P_n *di grado* n *tale che*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Inoltre, il molinomio P_n *è dato dalla formula:*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Definizione 2. *Sia* $n \in \mathbb{N}$, (a,b) *un intervallo aperto di* $\mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *e* $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una funzione. Scriviamo che*

$$g(x) = o(|x-x_0|^n),$$

se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Usando la definizione precedente possiamo riscrivere Teorema 1 nel modo seguente.

Teorema 1. *Siano* $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in (a,b)$ *e* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che:*

- f *è derivabile* $n-1$ *volte su* (a,b)*;*
- $f^{(n-1)}$ *è derivabile in* x_0*.*

Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n).$$

Esempi di sviluppi notevoli

$e^x = 1 + x + o(x)$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\ln(1+x) = x + o(x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$\sin x = x + o(x)$	$\cos x = 1 + o(x)$
$\sin x = x + o(x^2)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

Esercizio 3. *Dimostrare che*

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3),$$

per $\alpha \in \mathbb{R}$, *ma* $\alpha \neq 0$ *e* $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Esercizi

Esercizio 4. *Scrivere lo sviluppo di Taylor fino all'ordine n delle seguenti funzioni:*

$\sin(2x) =$ $\quad n = 3$

$\cos(x + x^2) =$ $\quad n = 4$

$e^{2x - x^2} =$ $\quad n = 3$

$\ln(1 - 2x) =$ $\quad n = 2$

$\ln(\cos x) =$ $\quad n = 4$

$\ln(1 + \sin(2x)) =$ $\quad n = 4$

Esercizio 5. *Scrivere lo sviluppo di Taylor fino all'ordine n delle seguenti funzioni:*

$\sqrt{1 + x} =$ $\quad n = 4$

$\sqrt{1 + 2x} =$ $\quad n = 3$

$\sqrt{1 - 3x} =$ $\quad n = 3$

$\sqrt{1 + x^2} =$ $\quad n = 4$

$\sqrt{1 + x - x^2} =$

$n = 4$

$\sqrt{1 + \sin x} =$

$n = 4$

$\sqrt{\cos x} =$

$n = 4$

Esercizio 6. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \arcsin x}{\left(e^x - \dfrac{1}{1+x}\right)\ln x}$$

Esercizio 7. *Scrivere lo sviluppo di Taylor fino all'ordine n delle seguenti funzioni:*

$\dfrac{1}{1+\sin x} =$ $\qquad n = 2$

– –

$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}} =$ $\qquad n = 3$

– –

$\arctan\left(\dfrac{x}{1+x}\right) =$ $\qquad n = 3$

– –

$\arcsin(2x + x^2) =$ $\qquad n = 3$

– –

$\arctan(\sin x) =$ $\qquad n = 3$

– –

Esercizio 8. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{\arctan x - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\ln(1+x)}$$