

Principali definizioni, formule e teoremi da sapere

Gli enunciati completi si trovano nelle dispense sul sito del corso.

I risultati segnati con ★ sono particolarmente importanti.

Questo elenco contiene soltanto i risultati principali; tutto quello che abbiamo fatto a lezione o si trova sul sito del corso fa parte del programma.

1. Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n

- Definizione della norma Euclidea di un vettore in \mathbb{R}^n .
- Definizione della distanza fra due punti in \mathbb{R}^n .
- Prodotto scalare in \mathbb{R}^n - definizione e proprietà
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz in \mathbb{R}^n - con dimostrazione.
- Disuguaglianza triangolare in \mathbb{R}^n - con dimostrazione.
- Convergenza di una successione in \mathbb{R}^n - definizione
- \mathbb{Q}^n è denso in \mathbb{R}^n - con dimostrazione.

2. Topologia

- Insiemi aperti - definizione
- L'unione di insiemi aperti è un aperto - con dimostrazione
- L'intersezione di due insiemi aperti è un aperto - con dimostrazione
- Il prodotto di intervalli (o insiemi) aperti in \mathbb{R} è un aperto in \mathbb{R}^n - con dimostrazione
- Insiemi chiusi - definizione
- L'unione di due insiemi chiusi è un chiuso - con dimostrazione
- L'intersezione di insiemi chiusi è un chiuso - con dimostrazione
- Chiuso \Leftrightarrow chiuso per successioni (Teorema 17 delle dispense) - con dimostrazione
- Il prodotto di intervalli (o insiemi) chiusi in \mathbb{R} è un chiuso in \mathbb{R}^n - con dimostrazione
- Chiusura, parte interna e bordo - definizione e Teorema 22 - con dimostrazione
- Insiemi compatti - definizione
- Compatto \Leftrightarrow chiuso e limitato (Teorema 37) - con dimostrazione
- Insiemi numerabili - definizione
- Ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile (Proposizione 35) - con dimostrazione
- Funzioni continue su sottoinsiemi di \mathbb{R}^n - definizione

- Proposizione 41 - funzioni continue - definizioni equivalenti - con dimostrazione
- ★ Le funzioni continue mandano insiemi compatti in insiemi compatti (Prop. 42 e Cor. 43) - con le dimostrazioni
- La composizione di funzioni continue è continua - con dimostrazione
- Insiemi connessi e insiemi connessi per archi - definizione
- Un aperto è connesso se e solo se è connesso per archi - Proposizione 52 - con dimostrazione

3. Derivate parziali

- ★ Funzioni derivabili, derivate parziali e gradiente - definizioni
 - Somma e prodotto di funzioni derivabili
- ★ Funzioni con gradiente nullo (Prop.3) - con dimostrazione
- ★ Derivate parziali seconde - Teorema di Schwarz - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Esempio di una funzione derivabile, ma non continua
 - Funzioni differenziabili - definizione
 - Le funzioni differenziabili (in un punto) sono derivabili (in quel punto)
 - Le funzioni differenziabili (in un punto) sono continue (in quel punto)
- ★ Teorema del differenziale (Teorema 9) - se una funzione è derivabile e le sue derivate parziali sono continue, allora la funzione è differenziabile - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Teorema di Taylor al secondo ordine - Teorema 10 - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Formule per la derivazione di una funzione composta (Teorema 5 oppure il Teorema 1 del file sulle funzioni composte - a scelta dello studente - la forma più diffusa è quella del file sulle funzioni composte) - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Esempio di una funzione continua e derivabile in zero, ma non differenziabile in zero.

3.1. Massimi e minimi

- Massimi e minimi locali all'interno di un insieme aperto - condizione al primo ordine
- Massimi e minimi locali sul bordo di un quadrato oppure sul bordo di un insieme regolare - condizioni necessarie e sufficienti al primo ordine in dimensione due - con dimostrazioni
- ★ Massimi e minimi locali - condizioni necessarie e sufficienti al primo ordine in dimensione due - con dimostrazioni
 - Matrice Hessiana, matrici definite positive/negative e semidefinite positive/negative. Determinante. Metodo per determinare se una matrice 2×2 è (semi)definita positiva/negativa in dimensione due.

3.2. Teorema della funzione implicita

- ★ Teorema della funzione implicita in dimensione due - con dimostrazione

3.3. Moltiplicatori di Lagrange

- ★ Teorema dei moltiplicatori di Lagrange - con dimostrazione in dimensione due

4. Forme differenziali

- 1-forme, 2-forme e k -forme ($k \in \mathbb{N}$) in \mathbb{R}^n - definizione e operazioni con le forme differenziali - somma di forme differenziale, prodotto di una forma differenziale con una funzione.
- Prodotto esterno di forme differenziali - definizione e proprietà
- Derivata esterna di una forma differenziale - definizione e proprietà
- Forme esatte e forme chiuse - definizione
- ★ Teorema 19. Le forme esatte sono chiuse - con dimostrazione per le 1-forme in dimensione 2.
- ★ Teorema 20. Le forme esatte sono chiuse - con dimostrazione per le 2-forme in dimensione 3.
- ★ Esempio di una forma chiusa ma non esatta

5. Curve e integrali curvilinei

- Definizione di una curva C^1 a tratti
- Definizione di una curva chiusa
- Definizione di una curva semplice
- Definizione di γ_-
- Concatenamento di curve - definizione
- Integrale di una funzione su una curva - definizione
- Curve equivalenti - definizione
- L'integrale non dipende dalla parametrizzazione - con dimostrazione
- Teorema 17. Integrazione su curve e partizioni
- Lunghezza di una curva (Teorema 20)
- Integrazione di 1-forme su curve - definizione
- L'integrale di una 1-forma non dipende dalla parametrizzazione (Oss 26) - con dimostrazione
- ★ Integrazione di forme esatte su curve - Teorema 27 - con dimostrazione
- ★ Teorema 28 - caratterizzazione delle forme esatte - con dimostrazione
- Teorema di derivazione sotto il segno dell'integrale - con dimostrazione
- ★ In un rettangolo le forme chiuse sono esatte - con dimostrazione in dimensione due
- ★ In un aperto stellato le forme chiuse sono esatte - con dimostrazione in dimensione due.
- Il toro non è una palla: in dimensione due B_r e $B_R \setminus \{0,0\}$ non sono diffeomorfi - con dimostrazione.

5. Integrazione in \mathbb{R}^n

- Integrale di Riemann su rettangoli in \mathbb{R}^n - costruzione in \mathbb{R}^2
- Criteri di integrazione
- Integrabilità delle funzioni continue su rettangoli - con dimostrazione in dimensione due
- Teorema di Cantor su compatti in \mathbb{R}^n - con dimostrazione
- Teorema di Fubini su domini rettangolari - con dimostrazione in dimensione due
- Definizione di integrale di una funzione su un dominio limitato in \mathbb{R}^n
- Integrabilità di funzioni continue su domini normali - con dimostrazione in dimensione due nel caso $f < g$ su (a, b) .
- Teorema di Fubini su domini normali - senza dimostrazione
- ★ Formule di Gauss-Green - con dimostrazione (anche del Lemma 21)
- ★ Teorema della divergenza in dimensione due - con dimostrazione in dimensione due
- ★ Teorema della divergenza su domini normali - in dimensione due - con dimostrazione
- Teorema della divergenza su domini regolari - in dimensione due - con dimostrazione
- Orientazione in \mathbb{R}^2 - parametrizzazione del bordo in senso antiorario e in senso orario - costruzione
- ★ Formula di Stokes in \mathbb{R}^2 - dimostrazione in domini normali
- I diffeomorfismi che preservano l'orientazione preservano anche l'orientazione dei bordi - con dimostrazione
- Cambio di variabile in dimensione 2 - con dimostrazione.
- Calcolo dell'integrale della Gaussiana
- Integrazione di 2-forme su superfici parametriche
- L'integrale non dipende dalla parametrizzazione - con dimostrazione
- ★ Formula di Stokes per superfici - con dimostrazione
- Interpretazione della divergenza ed il rotore di un campo vettoriale
- Prodotto vettoriale e forme differenziali
- Integrale di una funzione su una superficie - definizione
- ★ Definizione di vettore normale - il vettore normale non dipende dalla parametrizzazione - con dimostrazione
- ★ Teorema del rotore