Serie numeriche

Definizioni

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali (o complessi).

- Si dice (n-esima) **somma parziale** della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ la somma finita $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$.
- Diciamo che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge** se esiste (ed è finito) il limite delle somme parziali
$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$
- Diciamo che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **diverge** se la successione $(S_n)_{n\geq 1}$ delle somme parziali diverge, i.e.
$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$
- Una serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è regolare, se converge oppure diverge.

Due esempi importanti

Sia X un numero reale positivo ($X \in \mathbb{R}$, $X > 0$).

- Se $X < 1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} X^k$ converge. Inoltre, la successione delle somme parziali
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X^k = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n,$$

converge al limite $\dfrac{1}{1-X}$. Quindi, possiamo scrivere
$$\sum_{k=0}^{+\infty} X^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-X}.$$

- Se $X \geq 1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} X^k$ diverge.

Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Teorema 1. *Sia* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ *una serie di numeri reali (o complessi).*
Se la serie converge, allora necessariamente $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Operazioni algebriche con le serie

Teorema 2. *Siano*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

due serie di numeri reali (o complessi) convergenti. Sia C una costante reale (o complessa). Allora anche le serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k) \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} Ca_k$$

convergono e si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{+\infty} a_k+\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} Ca_k = C\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Serie di numeri reali non-negativi

Teorema 3. *Sia $(a_k)_{k\geq 1}$ una successione di <u>numeri reali non-negativi</u> ($a_k \geq 0$ per ogni k) e sia*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\,,$$

la successione delle somme parziali della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

(i) Se la successione delle somme parziali $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.

(ii) Se la successione delle somme parziali $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limiata, allora la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge.

Criterio del confronto

Teorema 4. *Siano $(a_k)_{k\geq 1}$ e $(b_k)_{k\geq 1}$ due successioni di numeri <u>reali non-negativi</u>, con la seguente proprietà: esiste $N\in\mathbb{N}$ tale che*

$$0\leq a_k\leq b_k \quad \textit{per ogni} \quad k\geq N.$$

Allora, sono vere le seguenti implicazioni.

(i) Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge, allora converge anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

(ii) Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge, allora diverge anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.

Criterio del rapporto

Teorema 5. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione di* *numeri reali positivi* *(*$a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*). Supponiamo che esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = X.$$

(i) Se $0 \leq X < 1$*, allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

(ii) Se $X > 1$ *oppure* $X = +\infty$*, allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Criterio della radice

Teorema 6. *Sia* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una successione di* *numeri reali non-negativi* *(*$a_n \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*). Supponiamo che esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = X.$$

(i) Se $0 \leq X < 1$*, allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

(ii) Se $X > 1$ *oppure* $X = +\infty$*, allora la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Esercizi sulle serie

Esercizio 7. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}}$ *diverge.*

Esercizio 8. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+4}+\sqrt{k}}$ *diverge.*

Esercizio 9. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ *converge e trovare il limite delle somme parziali.*

Esercizio 10. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+3)}$ *converge e trovare il limite delle somme parziali.*

Esercizio 11. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$ *converge e trovare il limite delle somme parziali.*

Esercizio 12. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!}$ *converge e trovare il limite delle somme parziali.*

Esercizio 13. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k+2}{4^k}$ *converge e trovare il limite delle somme parziali.*

Esercizio 14. *Dimostrare che la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k+5}{3^{k+1}}$ *converge e trovare il limite delle somme parziali.*

Esercizio 15. *Studiare (dire se convergono o divergono) le serie seguenti:*

(1) $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5^{3n+1}}{n!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2(n-2)}}{(n+2)!}\ ;$$

(2) $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n^2+2n}}{n!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{n^2}}{2^{(n+1)^2}}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(n^2)!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)!(n+2)!}{(2n+1)!}\ ;$$

(3) $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)!(n+2)!}{(2n+1)!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!(n+1)!(n+3)!}{(3n)!}\ ;\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n\big[(n+1)!\big]^2}{(2n)!}\ .$$

Tre esercizi sulle successioni

Proposizione 16. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata di numeri reali non-negativi con la seguente proprietà: esistono due costanti $b>0$ e $B>b$ tali che*

$$b\le a_n\le B\quad \textit{per ogni}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}=1.$$

Proposizione 17.

(i) Dimostrare che se $X>0$ e $n\in\mathbb{N}$, allora

$$(1+X)^n\ge 1+nX.$$

Dedurre che

$$(nX)^{1/n}\le 1+X.$$

(ii) Sia $n\in\mathbb{N}$. Scegliendo opportunamente X del punto precedente, dimostrare che

$$n^{1/n}\le\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2.$$

(iii) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1.$$

Esercizio 18. *Calcolare i limiti seguenti*

(1) $$\lim_{n\to\infty}(n^2+1)^{1/n}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}(4n+3)^{1/n}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/(2n+1)}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}(n^2+2)^{1/6n}\ ;$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}P(n)^{1/n}\ ,$$

dove P è un polinomio a coeffieicenti reali, di grado $m\in\mathbb{N}$, con coefficiente a_m (a_m è il coefficiente davanti a X^m) strettamente positivo ($a_m>0$):

$$P(X)=\sum_{k=0}^{m}a_kX^k=a_mX^m+a_{m-1}X^{m-1}+\cdots+a_2X^2+a_1X+a_0.$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\left(n^2+2^n\right)^{1/n}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}\left(3^nn^2+3\right)^{1/n}\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}\left(2^nn^3+3^n\right)^{1/2n}\ .$$

Esercizio sulle serie

Esercizio 19. *Studiare (dire se convergono o divergono) le serie seguenti:*

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(n+2)^n}{(4n+1)^n}\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n+1}}\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{3n+1}}{(n+5)^{2n}}\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)^{2n}}\ ;$$

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+2n^2+3n+6}{2^n}\ ; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^{n+1}}\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3^n}{4^n}\ ; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n+n^2}{2^n+n^3}\ ;$$

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^n}{n^n+3^n}\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^{2n+1}}{(2n+1)^n+(3n+1)^n}\ ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n-1}}{(2n+1)^n}\ .$$